Analisi Matematica per le Applicazioni

CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2022/2023

Preparazione alla prima parte della prova scritta (21-12-2022)

Soluzioni

Esercizio 0. [*]

(1) L'unico punto critico interno è $(0,0)$, in corrispondenza del quale la funzione assume il valore $f(0,0)=0$; la matrice hessiana ha determinante 4 e l'elemento $f_{xx}(0,0)=2$ è positivo, quindi si tratta di un punto di minimo locale. Sulla frontiera $\partial\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ la funzione assume valore 1: quindi il minimo assoluto è 0, assunto in $(0,0)$, mentre il massimo assoluto è 1, assunto sull'intera frontiera.

(2) Si ha $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{4}$.

(3) Si ha $\displaystyle\int_\gamma 2\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y=\int_0^1 2x'(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 3y'(t)\,\mathrm{d}t=2+3=5$, poiché $x(t)=y(t)=t$.

Esercizio 1. [5] L'unico punto critico interno è $(0,0)$, in corrispondenza del quale la funzione assume il valore $f(0,0)=1/2$; si trova

$$f_{xx}(x,y)=\frac{3x^2}{(4-x^2-2y^2)^{5/2}}+\frac{1}{(4-x^2-2y^2)^{3/2}},\qquad f_{xy}(x,y)=\frac{6xy}{(4-x^2-2y^2)^{5/2}},$$
$$f_{yy}(x,y)=\frac{12y^2}{(4-x^2-2y^2)^{5/2}}+\frac{2}{(4-x^2-2y^2)^{3/2}},$$

così che, se $H(x,y)$ denota la matrice hessiana, si ha $\det H(0,0)=2/4^3=1/32$ e $H_{11}(x,y)=f_{xx}(0,0)=1/4^{3/2}=1/8$; quindi $(0,0)$ è un punto di minimo locale. Se $y=\pm1$ e $x\in[-1,1]$ la funzione di una variabile $g_\pm(x)=f(x,\pm1)=1/\sqrt{2-x^2}$ ha un punto di minimo locale in $x=0$, dove vale $g_\pm(0)=1/\sqrt{2}$, e assume valore 1 ai bordi, i.e. per $x=\pm1$. Se $x=\pm1$ e $y\in[-1,1]$ la funzione $h_\pm(y)=f(\pm1,y)=1/\sqrt{3-y^2}$ ha un punto di minimo locale in $y=0$, dove vale $h_\pm(0)=1/\sqrt{3}$, e assume valore 1 ai bordi, i.e. per $y=\pm1$. In conclusione $f(x,y)$ in D ha massimo assoluto 1, raggiunto in corrispondenza dei vertici del quadrato D, e minimo assoluto $1/2$, raggiunto in $(0,0)$

Esercizio 2. [5] I punti critici della funzione $f(x,y)$ sono $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ e $(1,1)$; di essi solo il primo è interno al dominio D, dal momento che gli altri 4 appartengono alla frontiera $\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=2\}$. Si ha $f_{xx}(0,0)=2(y^2-1)$, $f_{xy}=4xy$ e $f_{yy}=2(x^2-1)$, quindi la matrice hessiana in $(0,0)$ ha determinante 4 e, poiché $f_{xx}(0,0)=-2$ è negativo, il punto critico $(0,0)$ è un punto di massimo locale, in cui la funzione vale $f(0,0)=1$. Sulla frontiera ∂D, parametrizzata come $x=\sqrt{2}\cos\theta$, $y=\sqrt{2}\sin\theta$, con $\theta\in[0,2\pi)$, si ha

$$g(\theta)=f(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)=(2\cos^2\theta-1)(2\sin^2\theta-1)=4\cos^2\theta\sin^2\theta-1=\sin^2(2\theta),$$

così che $g'(\theta)=4\sin(2\theta)\cos(2\theta)=2\sin(4\theta)$ e $g''(\theta)=8\cos(4\theta)$. Si hanno quindi i punti critici $\theta=k\pi/4$, con $k=0,\dots,7$; di essi $\theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$ sono punti di minimo locale, in corrispondenza dei quali la funzione assume valore -1, mentre $\theta=\pi/4,3\pi/4,\pi,5\pi/4,7\pi/4$ sono punti di massimo locale, in corrispondenza dei quali la funzione assume valore 0: infatti $\cos 0=\cos 2\pi=\cos 4\pi=\cos 6\pi=1>0$, mentre $\cos\pi=\cos 3\pi=\cos 5\pi=\cos 7\pi=-1<0$. In conclusione il massimo assoluto di $f(x,y)$, raggiunto in $(0,0)$, è 1, mentre il minimo assoluto, raggiunto nei punti di frontiera $(0,-\sqrt{2})$, $(0,\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$, è -1.

Esercizio 3. [5] Il dominio D è costituito dall'insieme delimitato dai grafici delle due funzioni $f_1(x)=4-x$ e $f_2(x)=3/x$. I due grafici si intersecano in corrispondenza dei valori $x>0$ in cui $f_1(x) = f_2(x)$. Si trova

$$4 - x = \frac{3}{x} \implies x^4 - 4x + 3 = 0 \implies x = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm 1 \implies x = 1,\ x = 3.$$

Si ha quindi

$$\iint_D \frac{3(4-x)}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^3 3(4-x)\mathrm{d}x \int_{3/x}^{4-x} \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \int_1^3 3(4-x)\mathrm{d}x \left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{3/x}^{4-x}$$
$$= \int_1^3 3(4-x)\mathrm{d}x \left(-\frac{1}{4-x} + \frac{x}{3}\right) = -\int_1^3 3\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x(4-x)\,\mathrm{d}x$$
$$-\,3x\Big|_1^3 + 2x^2\Big|_1^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = -9 + 3 + 18 - 2 - 9 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

<u>Esercizio 4.</u> [5] Utilizzando coordinate sferiche, il dominio Ω diventa $\Omega = \{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0,\pi) \times [0,2\pi) : 1 \le \rho \le \sqrt{2},\quad 0 \le \theta < \pi/4\}$, dove si è tenuto conto che

- poiché $\sin\theta > 0$ per $\theta \in (0,\pi)$, la condizione $z > \sqrt{x^2+y^2}$ si riscrive $\rho\cos\theta > \rho|\sin\theta| = \rho\sin\theta$, ovvero $\operatorname{tg}\theta < 1$;
- per $\theta \in [0,\pi)$, la condizione $\operatorname{tg}\theta = 0$ implica $\theta = 0$, mentre $\operatorname{tg}\theta = 1$ implica $\theta = \pi/4$.

Si trova, scrivendo $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ e operando la sostituzione $\cos\theta = t$ nell'integrale su θ,

$$\iiint_\Omega = \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/4} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\rho^4 \sin^2\theta \cos^2\varphi\,\cos^2\theta$$
$$= \left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^6\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4} \sin\theta\,\cos^2\theta \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)$$
$$= \frac{\rho^7}{7}\Bigg|_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos^5\theta}{5} - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} \left(\frac{\varphi + \cos\varphi\sin\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{8\sqrt{2}-1}{7}\;\frac{16-7\sqrt{2}}{120}\,\pi.$$

<u>Esercizio 5.</u> [5] Si ha $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove l'arco $\gamma_1 = \{(t,t^2) : t \in [0,1]\}$ è percorso da sinistra a destra, mentre l'arco $\gamma_2 = \{(t,\sqrt{t}) : t \in [0,1]\}$ è percorso da destra a sinistra. Si ha pertanto

$$\oint_\gamma 2xy\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = \int_{\gamma_1} 2xy\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y - \int_{\gamma_2} 2xy\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y$$
$$\left(\int_0^1 2tt^2\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2\,2t\,\mathrm{d}t\right) - \left(\int_0^1 2t\sqrt{t}\mathrm{d}t - \int_0^1 \sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right)$$
$$= 0 - \left(\frac{4}{5}t^{5/2}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}t\Bigg|_0^1\right) = -\frac{4}{5} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{10},$$

poiché si ha $(x(t),y(t)) = (t,t^2)$ e quindi $(x'(t),y'(t)) = (1,2t)$ lungo γ_1, mentre risulta $(x(t),y(t)) = (t,\sqrt{t})$ e quindi $(x'(t),y'(t)) = (1,1/(2\sqrt{t}))$ lungo γ_2.

<u>Esercizio 6.</u> [5] La superficie è parametrizzata, utilizzando coordinate cilindriche, come

$$\Sigma = \{\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (\cos u, \sin u, v) : u \in [0,2\pi),\ v \in [0,3]\}.$$

Si ha $\boldsymbol{\sigma}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ e $\boldsymbol{\sigma}_v = (0,0,1)$, così che $\boldsymbol{\sigma}_u \wedge \boldsymbol{\sigma}_v = (\cos u, \sin u, 0)$ e quindi $\|\boldsymbol{\sigma}_u \wedge \boldsymbol{\sigma}_v\| = 1$. Si trova allora

$$\int_\Sigma x^2 \mathrm{e}^{x^2+y^2} \sin\pi z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^3 \mathrm{d}v\,\cos^2 u\,\mathrm{e}^1\,\sin\pi v = \mathrm{e}\,\frac{u + \sin u\cos u}{2}\Bigg|_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos\pi z}{\pi}\right)\Bigg|_1^3 = 2\mathrm{e}.$$
