Analisi Matematica per le Applicazioni
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2022/2023

Preparazione alla prova scritta (30-12-2022)
Soluzioni

Esercizio 0. [*]
(1) Si ha
$$\iiint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z = 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

---

(2) Integrando una volta si trova: $y'(x) = x + C_1$, dove C_1 è una costante arbitraria. Integrando una seconda volta si trova la soluzione generale
$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$
dove C_2 è un'altra costante arbitraria. [Alternativamente, la soluzione generale dell'omogenea è $y_0(x) = A + Bx$, dove A e B sono costanti arbitrarie e, cercando una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = Cx^2$, si trova $C = 1/2$.]

---

(3) Integrando per separazione di variabili si trova
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x\,\mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow \qquad \log|y| = \frac{x^2}{2} + C,$$
dove $y = y(x)$ e la costante C è fissata dalle condizioni iniziali: per $x = 0$ si ha $y(0) = 1$ e quindi $\log|y(0)| = 0 + C$, ovvero $C = 0$. Ne segue che $|y(x)| = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$. Di nuovo, poiché $y(0) = 1 > 0$, si deve prendere la determinazione positiva del modulo: $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$.

---

(4) Passando a coordinate polari (ρ, θ), ci si riconduce al limite
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \cos^4\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\cos^4\theta,$$
che è 0 dal momento che $|\cos^4\theta| \le 1$. Quindi la funzione è continua in $(0, 0)$.

Esercizio 1. [5] Integrando per separazione di variabili si trova
$$\int \frac{1+y^4}{y^3}\mathrm{d}y = \int x\log(1+x^2)\,\mathrm{d}x,$$
dove
$$\int \frac{1+y^4}{y^3}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y^3}\mathrm{d}y + \int y\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2y^2} + \frac{y^2}{2} + \text{costante},$$
e, operando la sostituzione $t = 1 + x^2$,
$$\int x\log(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \log t\,\mathrm{d}t = t\,(\log t - 1) + \text{costante} = \frac{1}{2}(1+x^2)\left(\log(1+x^2) - 1\right) + \text{costante},$$
ovvero
$$-\frac{1}{2y^2} + \frac{y^2}{2} = f(x) := \frac{1}{2}(1+x^2)\left(\log(1+x^2) - 1\right) + C,$$

dove la costante C si fissa imponendo le condizioni iniziali $y(0)=1$: si trova $C=1/2$. Moltiplicando per $2y^2$ si ottiene

$$y^4 - 2f(x)y^2 - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = f(x) \pm \sqrt{f^2(x)+1}.$$

Poiché $y^2 \geq 0$ e $\sqrt{f^2(x)+1} > |f(x)| \geq f(x)$, si deve prendere la determinazione positiva, e, tenuto conto che $y(0)=1>0$, si ottiene alla fine

$$y(x) = \pm\sqrt{f(x)+\sqrt{f^2(x)+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt{f(x)+\sqrt{f^2(x)+1}}$$

dove $f(x) = \dfrac{1}{2}(1+x^2)\left(\log(1+x^2)-1\right)+\dfrac{1}{2}$.

<u>Esercizio 2.</u> [5] Il sistema si riscrive nella forma

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e la soluzione è data da $\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{At}\boldsymbol{y}(0)$. Gli autovalori di A solo le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det(A-\lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 - 3\lambda$, quindi sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$. I corrispondenti autovettori sono $\boldsymbol{v}_1 = (-2,1)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (1,1)$. Quindi, se si definisce $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, si trova

$$C^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\mathrm{e}^{Ax} = C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x}+2 & 2\mathrm{e}^{3x}-2 \\ \mathrm{e}^{3x}-1 & 2\mathrm{e}^{3x}+1 \end{pmatrix}.$$

[Alternativamente si osserva che $A^2 = 3A$ e , più in generale, $A^k = 3^{k-1}A$ per ogni $k \geq 1$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{Ax} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Ax)^k}{k!} = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}Ax^k}{k!} \\
&= \mathbb{1} + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3x)^k}{k!} - 1\right)A = \frac{1}{3}\left(3\mathbb{1} + \left(\mathrm{e}^{3x}-1\right)A\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \left(\mathrm{e}^{3x}-1\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x}+2 & 2\mathrm{e}^{3x}-2 \\ \mathrm{e}^{3x}-1 & 2\mathrm{e}^{3x}+1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

che porta allo stessa espressione.] La soluzione generale è della forma $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\boldsymbol{y}(0)$, dove $\boldsymbol{y}(0) = (a,b)$ costituisce il dato iniziale. Quindi si ha

$$y_1(x) = \frac{1}{3}\left((\mathrm{e}^{3x}+2)a + (2\mathrm{e}^{3x}-2)b\right), \qquad y_2(x) = \frac{1}{3}\left((\mathrm{e}^{3x}-1)a + (2\mathrm{e}^{3x}+1)b\right),$$

dove le costanti a e b sono fissate una volta che si fissi la condizione iniziale.

<u>Esercizio 3.</u> [5] Poiché il polinomio $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ ammette un'unica radice $\lambda = 1$ con molteplicità 2, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è della forma $y_0(x) = \mathrm{e}^x(\alpha x + \beta)$. Il termine non omogeneo $x^2\mathrm{e}^x$ contiene un esponenziale con esponente x, quindi la soluzione particolare si

cerca nella forma $\bar{y}(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^x$. Imponendo che $\bar{y}(x)$ risolva l'equazione e scrivendo $P(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$, si trova

$$\bar{y}(x) = e^x P(x), \qquad \bar{y}'(x) = e^x (P(x) + P'(x)), \qquad \bar{y}''(x) = e^x (P(x) + 2P'(x) + P''(x)),$$

che, inserite nell'equazione, dànno

$$\bar{y}''(x) - 2\bar{y}'(x) + \bar{y}(x) = e^x \big(P(x) + 2P'(x) + P''(x) - 2P(x) - 2P'(x) + P(x)\big) = e^x P''(x) = e^x x^2$$

dove $P''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$. Si trova quindi $B = C = 0$ e $A = 1/12$. La soluzione generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = y_0(x) = \bar{y}(x) = e^x \left(\alpha x + \beta + \frac{1}{12} x^4 \right).$$

<u>Esercizio 4.</u> [5] Le derivatev parziali della funzione $f(x, y)$ sono

$$f_x(x, y) = \frac{2x + y}{1 + y^2}, \qquad f_y(x, y) = \frac{(x + 2y)(1 + y^2) - 2y(x^2 + xy + y^2)}{(1 + y^2)^2} = \frac{x + 2y - 2x^2 y - xy^2}{(1 + y^2)^2}.$$

Si ha $f_x(x, y) = 0$ se e solo se $y = -2x$, che, inserita in $f_y(x, y) = 0$, dà $x - 4x + 4x^3 - 4x^3 = 0$ ovvero $x = 0$. Quindi l'unico punto critico di $f(x, y)$ è $(0, 0)$ ed è interno al rettangolo D. In $(0, 0)$ la funzione assume il valore $f(0, 0) = 0$. Calcolando le derivate seconde si trova

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{2}{1 + y^2}, \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{1 - 4xy - y^2}{(1 + y^2)^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{(2 - 2x^2 + 2xy)(1 + y^2)^2 - 4y(1 + y^2)^2(x + 2y - 2x^2 y - xy^2)}{(1 + y^2)^4}. \end{aligned}$$

In particolare si ha $f_{xx}(0, 0) = 2$, $f_{xy}(0, 0) = 1$ e $f_{yy}(0, 0) = 2$. Quindi $f_{xx}(0, 0) > 0$ e, se $H(x, y)$ denota la matrice hessiana, si ha $\det H(0, 0) = 3 > 0$: ne segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo. La frontiera di D è costituita dai quattro segmenti che delimitano il rettangolo: per $y = 2$ e $x \in [-1, 1]$, $y = -2$ e $x \in [-1, 1]$, $x = 1$ e $y \in [-2, 2]$ e $x = -1$ e $y \in [-2, 2]$ si ha, rispettivamente,

$$\begin{aligned} f(x, 2) &= g_1(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{5}, \qquad f(x, -2) = g_2(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{5}, \\ f(1, y) &= g_3(y) = \frac{1 + y + y^2}{1 + y^2} = 1 + \frac{y}{1 + y^2}, \qquad f(-1, y) = g_4(y) = \frac{1 - y + y^2}{1 + y^2} = 1 - \frac{y}{1 + y^2}. \end{aligned}$$

Si ha la seguente situazione:

- la funzione $g_1(x)$ è crescente in $[-1, 1]$ (poiché $g_1'(x) = 2(x + 1)/5$), quindi ha un punto di minimo in $x = -1$, dove vale $g_1(-1) = 3/5$, e un punto di massimo in $x = 1$, dove vale $g_1(1) = 7/5$;
- la funzione $g_2(x)$ è decrescente in $[-1, 1]$ (poiché $g_2'(x) = 2(x - 1)/5$), quindi ha un punto di massimo in $x = -1$, dove vale $g_1(-1) = 7/5$, e un punto di minimo in $x = 1$, dove vale $g_1(1) = 3/5$;
- la funzione $g_3(y)$ ha punti critici in $y = \pm 1$ (poiché $g_3'(y) = (1 - y^2)/((1 + y^2)^2))$, e, poiché $g_3(-1) = 1/2$ e $g_3(1) = 3/2$, mentre agli estremi di $[-2, 2]$ si ha $g_3(-2) = g_2(1) = 3/5$ e $g_2(2) = g_1(1) = 7/5$, ne segue che $g_3(y)$ ha un punto di massimo in $y = 1$ e un punto di minimo in $y = -1$;

- la funzione $g_4(y)$ ha punti critici in $y = \pm 1$ (poiché $g_3'(y) = -(1-y^2)/((1+y^2)^2)$), e, poiché $g_3(-1) = 3/2$ e $g_3(1) = 1/2$, mentre agli estremi di $[-2, 2]$ si ha $g_3(-2) = g_2(-1) = 7/5$ e $g_3(2) = g_1(-1) = 3/5$, ne segue che $g_4(y)$ ha un punto di massimo in $y = -1$ e un punto di minimo in $y = 1$;

In conclusione il minimo assoluto di $f(x, y)$ è 0 ed è assunto in $(0, 0)$, mentre il massimo assoluto è $3/2$ ed è raggiunto in corrispondenza dei due punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

<u>ESERCIZIO 5.</u> [5]

L'insieme D è delimitato dalla due curve $y = 1 - |x|$ e $y = x^2 - 1$. Le due curve si intersecano nei punti (x, y) tali che

$$x^2 - 1 = 1 - |x|, \qquad y = y(x) = x^2 - 1 = 1 - |x|.$$

Se $x \geq 0$ si ha $x^2 - 1 = 1 - |x|$ se $x^2 - 1 = 1 - x$, ovvero $x^2 + x - 2 = 0$, che ha soluzioni $x = -2$ e $x = 1$: di esse solo $x = 1$ è positiva; analogamente, se $x < 0$, si ha $x^2 - 1 = 1 - |x| = 1 + x$, ovvero $x^2 - x - 2 = 0$, che ha soluzioni $x = 2$ e $x = -1$, di cui solo $x = -1$ è negativa. Si ha $y(x) = 0$ per $x = \pm 1$ e $1 - |x| > x^2 - 1$ per $x \in [-1, 1]$. Quindi $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y \in [x^2 - 1, 1 - |x|]\}$. In conclusione si ha

$$\iint_D (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^2 \int_{x^2-1}^{1-|x|} \mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, 2x \int_{x^2-1}^{1-|x|} y\,\mathrm{d}y,$$

dove

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^2 \int_{x^2-1}^{1-|x|} \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^2 \left(2 - |x| - x^2\right) = 2 \int_{0}^{1} \mathrm{d}x\, x^2 \left(2 - x - x^2\right),$$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, 2x \int_{x^2-1}^{1-|x|} y\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x \left((1 - |x|)^2 - (x^2 - 1)^2\right) = 0,$$

dove si è usato il fatto che l'integrando del primo integrale è pari, mentre quello del secondo integrale è dispari, e l'intrervallo di integrazione è simmetrico rispetto a $x = 0$. In conclusione si trova

$$\iint_D (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left(2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{13}{30}.$$

<u>ESERCIZIO 6.</u> [5]

Il segmento γ_1, orientato da P_1 a P_2, si può parametrizzare come $\gamma_1(t) = (t, 1 + t)$, con $t \in [-1, 0]$. Quindi si ha

$$\int_{\gamma_1} x^2 y \mathrm{d}s = \int_{-1}^{0} t^2 (1 + t)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{12},$$

dove si è tenuto conto che $\|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{1 + 1}$. L'arco di circonferenza γ_2, percorso in senso orario, si può parametrizzare come $\gamma_2'(t) = (\cos t, -\sin t)$, con $t \in [-\pi/2, \pi]$. Quindi si trova

$$\int_{\gamma_2} x^2 y \mathrm{d}s = -\int_{-\pi/2}^{\pi} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\left(-\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi} = \left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 0 = -\frac{1}{3}.$$

In conclusione si ha

$$\oint_{\gamma} x^2 y \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} x^2 y \mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} x^2 y \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2} - 4}{12}.$$
