Analisi Matematica per le Applicazioni
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2022/2023
Prova scritta - Primo appello (12-01-2023)

<u>Esercizio 0.</u> [4*]

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione del primo ordine $y' = 1$.
2. Si calcoli l'integrale doppio $\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dove $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$.
3. Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -xy^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$
4. Si determinino massimi e minimi di $f(x, y) = xy$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$.

<u>Esercizio 1.</u> [6] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(\mathrm{e}^{-y} + 1\right) \dfrac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

<u>Esercizio 2.</u> [6] Si trovi la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2. \end{cases}$$

<u>Esercizio 3.</u> [6] Si determini la soluzione generale dell'equazione $y'' + 2y' + 2y = x^2$.

<u>Esercizio 4.</u> [6] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(4.1) Si dimostri che la funzione è continua in $(0, 0)$.
(4.2) Si determinino massimi e minimi della funzione nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

<u>Esercizio 5.</u> [6] Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2} x^3 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \ y \ge 0, \ x^2 + y^2 \le 1\}.$$

<u>Esercizio 6.</u> [6] Si calcoli l'integrale curvilineo di prima specie

$$\oint_\gamma (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}s, \qquad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

dove γ_1 è il segmento che unisce il punto $P_1 = (-3, 0)$ al punto $P_2 = (-1, 0)$, γ_2 è l'arco di circonferenza di raggio 1 e centro in $(0, 0)$ che unisce in senso orario P_2 al punto $P_3 = (1, 0)$, γ_3 è l'arco di circonferenza di raggio 2 e centro in $(-1, 0)$ che unisce in senso orario P_3 a P_1.
