

**Analisi Matematica per le Applicazioni**  
**CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2022/2023**

Prova scritta - Quarto appello (3 luglio 2023)

---

---

ESERCIZIO 0. [4\*]

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione del primo ordine  $y' = x + 1$ .

---

2. Si calcoli l'integrale doppio  $\iint_{\Omega} (x - y) \, dx dy$ , dove  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

---

3. Si risolva il problema di Cauchy 
$$\begin{cases} y' = 2y^2 \sin x \cos x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

---

4. Si determinino massimi e minimi di  $f(x, y) = x^4 + y^4$  in  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ .

---

---

ESERCIZIO 1. [6] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy 
$$\begin{cases} xy' = y(y + 1), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

---

---

ESERCIZIO 2. [6] Si trovi la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali lineari in  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 - y_2, \end{cases}$$

e si determini la soluzione che corrisponde alle condizioni iniziali  $(y_1(0), y_2(0)) = (0, 1)$ .

---

---

ESERCIZIO 3. [6] Si determini la soluzione generale dell'equazione  $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ .

---

---

ESERCIZIO 4. [6] Si determinino massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 - xy$$

nell'insieme  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y - x^2| \leq 1\}$ .

---

---

ESERCIZIO 5. [6] Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} (x^2 + xy + 4y^2) \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

---

---

ESERCIZIO 6. [6] Data la forma differenziale in  $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (x^2 + x) \, dx + (x^2 y + y) \, dy,$$

sia  $\gamma$  la curva chiusa costituita dal segmento  $\gamma_1$  che unisce il punto  $(0, 0)$  al punto  $(1, 0)$ , dall'arco  $\gamma_2$  della circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio  $R = 1$  che unisce il punto  $(1, 0)$  al punto  $(0, 1)$  nel primo quadrante, e dal segmento  $\gamma_3$  che unisce il punto  $(0, 1)$  al punto  $(0, 0)$ .

1. si calcoli l'integrale curvilineo di seconda specie

$$\int_{\gamma} \omega,$$

dove la curva  $\gamma$  è percorsa in senso antiorario;

2. si discuta se la forma differenziale  $\omega$  è esatta.

---

---