
Exercises of Rational Mechanics
Prof. Guido Gentile
Prof.ssa Livia Corsi

a.y. 2022/2023, University of Rome "Roma Tre"

FEDERICO MANZONI
MICHELA POLICELLA

Contents

1	I: Ordinary Differential Equations	3
1.1	Exercise 1	3
1.2	Exercise 2	4
1.3	Exercise 3	5
1.4	Esercizio 4	6
1.5	Esercizio 5	7
1.6	Esercizio 6	8
2	II: Conservative systems, flux and periodicity, equilibrium points, and some useful relations	11
2.1	Exercise 1	11
2.2	Exercise 2	13
2.3	Exercise 3	15
2.4	Esercizio 4	17
2.5	Esercizio 5	18
2.6	Esercizio 6	19
3	III: Equilibrium points and unidimensional systems	20
3.1	Exercise 1	20
3.2	Exercise 2	21
3.3	Esercizio 3	27
3.4	Esercizio 4	29
3.5	Esercizio 5	31
4	IV Conserved quantities and unidimensional systems	33
4.1	Exercise 1	33
4.2	Exercise 2	34
4.3	Exercise 3	36
4.4	Esercizio 4	37
4.5	Esercizio 5	40
5	V: Motion in radial fields and unidimensional systems	43
5.1	Exercise 1	43
5.2	Exercise 2	43
5.3	Exercise 3	44
5.4	Esercizio 4	47
5.5	Esercizio 5	49
6	VI: Relative and central motions	51
6.1	Exercise 1	51
6.2	Exercise 2	53
6.3	Esercizio 3	55
6.4	Esercizio 4	59

7	VII: Revision exercises for mid-term test	61
7.1	Exercise 1	61
7.2	Exercise 2	64
7.3	Esercizio 3	66
7.4	Esercizio 4	69
8	VIII: Lagrangians and Euler-Lagrange equations	72
8.1	Exercise 1	72
8.2	Exercise 2	72
8.3	Exercise 3	73
8.4	Esercizio 4	74
8.5	Esercizio 5	75
8.6	Esercizio 6	76
9	IX: Lagrangian systems 1	78
9.1	Exercise 1	78
9.2	Exercise 2	80
9.3	Esercizio 3	82
9.4	Esercizio 4	85
10	X: Lagrangian systems 2	88
10.1	Exercise 1	88
10.2	Exercise 2	89
10.3	Esercizio 3	91
10.4	Esercizio 4	92
11	XI: Hamiltonian systems and canonical transformations	94
11.1	Exercise 1	94
11.2	Exercise 2	94
11.3	Esercizio 3	95
11.4	Esercizio 4	96
12	XII: Revision exercises for final test	98
12.1	Exercise 1	98
12.2	Exercise 2	99
12.3	Esercizio 3	100
12.4	Esercizio 4	102

1 I: Ordinary Differential Equations

1.1 Exercise 1

Solve the system

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 3x(t) - 4y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = 4x(t) - 7y(t) \end{cases} \quad (1)$$

with initial condition $x(0) = y(0) = 1$.

Solution

The solution of an homogeneous first order matrix ODE is given by

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{At}. \quad (2)$$

The matrix exponential can be computed using Caley-Hamilton theorem: essentially every matrix is a root of its characteristic polynomial. Therefore for a matrix $n \times n$, we can always reduce its power greater than $n - 1$ to a sum of the first $n - 1$ powers; so every matrix function can be rewritten as

$$f(A) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m A^m, \quad (3)$$

and the coefficients can be found requiring that on the diagonal form of the matrix we have

$$f(\lambda_j) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m \lambda_j^m \quad (4)$$

where λ_j are the eigenvalues. When the eigenvalues are repeated, that is $\lambda_i = \lambda_j$ for some $i \neq j$, two or more equations are identical and the linear system cannot be solved uniquely. For such cases, given an eigenvalue λ with multiplicity q , the first $q - 1$ derivatives of characteristic polynomial vanish at the eigenvalue. This leads to the extra $q - 1$ linearly independent equations

$$\frac{d^k f(\lambda_i)}{d\lambda_i^k} = \frac{d^k}{d\lambda_i^k} \left(\sum_{m=0}^{n-1} f_m \lambda_i^m \right), \quad k = 1, q - 1 \quad (5)$$

which, combined with others, yield the required n equations to solve for f_m .

In our case, we have

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

the eigenvalues of A are

$$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 1. \quad (7)$$

Therefore, imposing 4 we find a linear system for the coefficients f_j ,

$$e^{-5t} = f_0 - 5t f_1, \quad e^t = f_0 + t f_1; \quad (8)$$

whose solution is given by

$$f_0 = \frac{e^{-5t}}{6} + \frac{5e^t}{6}, \quad f_1 = \frac{e^t}{6t} - \frac{e^{-5t}}{6t} \quad (9)$$

Plugging into 3 and 2 we have

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{6} \left(\left(e^{-5t} + 5e^t \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{e^t - e^{-5t}}{t} \right) \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

so

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \exp \left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^t/3 - e^{-5t}/3 & 2e^{-5t}/3 - 2e^t/3 \\ 2e^t/3 - 2e^{-5t}/3 & 4e^{-5t}/3 - e^t/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-5t}/3 + 2e^t/3 \\ e^t/3 + 2e^{-5t}/3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

1.2 Exercise 2

Solve the matrix ODE

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \frac{x_1(t)}{2} + \frac{x_3(t)}{2} \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{x_1(t)}{2} + \frac{x_3(t)}{2} \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{x_4(t)}{2} + \frac{x_6(t)}{2} \\ \dot{x}_5(t) &= x_5(t) \\ \dot{x}_6(t) &= \frac{x_4(t)}{2} + \frac{x_6(t)}{2} \end{cases} \quad (12)$$

with initial condition $\mathbf{x}(0) := [x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0), x_5(0), x_6(0)] = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$

Solution

The ODE system can be written in matrix notation as

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (13)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

The solution is again given by

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{At}. \quad (15)$$

We may note that the matrix A is a projection matrix. Remember that a projection matrix is a linear operator $P : V \rightarrow V$ on a vector space V such that $P^2 = P$ (idempotent); therefore A satisfies $A^n = A \forall n \in \mathbb{N}$. This simplifies the computation of the matrix exponential by the use of the definition itself.

Indeed,

$$\begin{aligned}
e^{At} &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \mathcal{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A = \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^t+1}{2} & 0 & \frac{e^t-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^t-1}{2} & 0 & \frac{e^t+1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^t+1}{2} & 0 & \frac{e^t-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^t-1}{2} & 0 & \frac{e^t+1}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Therefore the solution is

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^t+1}{2} & 0 & \frac{e^t-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^t-1}{2} & 0 & \frac{e^t+1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^t+1}{2} & 0 & \frac{e^t-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^t-1}{2} & 0 & \frac{e^t+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^t + 1) + \frac{3}{2}(e^t - 1) \\ 2e^t \\ \frac{1}{2}(e^t - 1) + \frac{3}{2}(e^t + 1) \\ 2(e^t + 1) + 3(e^t - 1) \\ 5e^t \\ 2(e^t - 1) + 3(e^t + 1) \end{bmatrix} \tag{17}$$

1.3 Exercise 3

Solve the following second order differential equation

$$m\ddot{x} = -ax \tag{18}$$

with initial conditions $x(0) = 1$ and $\dot{x}(0) = 2$ using matrix exponential.

Solution

First of all let us rewrite the equation as a system of first order ODEs. We define

$$z = \dot{x}, \tag{19}$$

and the system can be rewritten as

$$\begin{cases} \dot{x} &= z, \\ \dot{z} &= -\frac{a}{m}z, \end{cases} \tag{20}$$

while the initial condition becomes

$$\mathbf{x}(0) := (x(0), z(0)) = (1, 2). \tag{21}$$

The solution is given by

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{At} \quad (22)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a}{m} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Let us compute the characteristic polynomial:

$$p_{ch}(\lambda) = -\lambda \left(-\frac{a}{m} - \lambda \right) = 0; \quad (24)$$

the eigenvalues are $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = -\frac{a}{m}$. We now compute the exponential of A using Cayley-Hamilton theorem, the system to solve in order to determine the coefficients is

$$\begin{cases} e^0 & = f_0, \\ e^{-\frac{at}{m}} & = f_0 - f_1 \frac{at}{m}; \end{cases} \quad (25)$$

the solution is

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \frac{m(1 - e^{-\frac{at}{m}})}{at}. \quad (26)$$

Therefore

$$\mathbf{x}(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{m}{at} (1 - e^{-\frac{at}{m}}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a}{m} \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{m}{a} (1 - e^{-\frac{at}{m}}) \\ 0 & e^{-\frac{at}{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\frac{m}{a}(1 - e^{-\frac{at}{m}}) \\ 2e^{-\frac{at}{m}} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

1.4 Esercizio 4

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con condizioni iniziali $x(0) = (2, 1, -1)$. Se ne determini la soluzione.

Soluzione

La soluzione generale del sistema è

$$x(t) = e^{At}x(0).$$

Si noti che la matrice A si può scrivere come $A = \mathbb{1} + N$ dove

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è tale che $N^3 = (0)_{ij}$ e chiaramente $[\mathbb{1}, N] = 0$.

Si ha quindi che

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(1+N)t} = e^{1t} e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \left(\mathbb{1} + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ t & 1 & 2t + 2t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 3te^t \\ te^t & e^t & (2t + 2t^2)e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto, la soluzione con dato iniziale $x(0) = (2, 1, -1)$ è data da

$$x(t) = e^{At} x(0) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 3te^t \\ te^t & e^t & (2t + 2t^2)e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(2 - 3t) \\ e^t(1 - 2t^2) \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

1.5 Esercizio 5

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha - 1 \\ -1 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

con condizioni iniziali $x(0) = (2, 0)$. Se ne determini la soluzione al variare del parametro α .

Soluzione

Per prima cosa, calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2\alpha - 1 \\ -1 & 2\alpha - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2\alpha - \lambda) + 2\alpha - 1 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 2\alpha - 1,$$

da cui segue che $p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2\alpha - 1, 1$.

Lo spettro di A è pertanto $\Sigma(A) = \{2\alpha - 1, 1\}$. Dobbiamo quindi studiare separatamente i casi $\alpha \neq 1$ e $\alpha = 1$.

Consideriamo per primo il caso $\alpha \neq 1$ e calcoliamo gli autospazi generalizzati.

$E_{2\alpha-1} = \text{Ker}(A - (2\alpha - 1)\mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} (2\alpha - 1)x_2 - (2\alpha - 1)x_1 = 0 \\ -x_1 + 2\alpha x_2 - (2\alpha - 1)x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue che

$$E_{2\alpha-1} = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Allo stesso modo, $E_1 = \text{Ker}(A - \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} (2\alpha - 1)x_2 - x_1 = 0 \\ -x_1 + 2\alpha x_2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue che

$$E_1 = \{((2\alpha - 1)t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Pertanto, una base di autovettori generalizzati è data da

$$v_1 = (1, 1), \quad v_2 = (2\alpha - 1, 1)$$

da cui

$$D = \begin{pmatrix} 2\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)} \\ -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2(1-\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Inoltre, $PDP^{-1} = A$ e quindi

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(2\alpha-1)t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)} \\ -\frac{1}{2(1-\alpha)} & \frac{1}{2(1-\alpha)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{(2\alpha-1)t} - (2\alpha-1)e^t}{2(1-\alpha)} & \frac{(e^{(2\alpha-1)t} - e^t)(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)} \\ \frac{e^{(2\alpha-1)t} - e^t}{2(1-\alpha)} & \frac{e^{(2\alpha-1)t}(1-2\alpha) + e^t}{2(1-\alpha)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto, la soluzione con dato iniziale $x(0) = (2, 0)$ è data da

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} \frac{e^{(2\alpha-1)t} - (2\alpha-1)e^t}{2(1-\alpha)} & \frac{(e^{(2\alpha-1)t} - e^t)(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)} \\ \frac{e^{(2\alpha-1)t} - e^t}{2(1-\alpha)} & \frac{e^{(2\alpha-1)t}(1-2\alpha) + e^t}{2(1-\alpha)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{(2\alpha-1)t} - (2\alpha-1)e^t}{1-\alpha} \\ \frac{e^{(2\alpha-1)t} - e^t}{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Studiamo ora il caso $\alpha = 1$. L'unico autospazio generalizzato è $E_1 = \text{Ker}(A - \mathbb{1})^2$ e si può facilmente verificare che $(A - \mathbb{1})^2 = (0)_{ij}$. Pertanto risulta $E_1 = \mathbb{R}^2$ e possiamo scegliere come autovettori generalizzati quelli della base canonica su \mathbb{R}^2

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (0, 1),$$

da cui si ottiene che $D = P = P^{-1} = \mathbb{1}$.

Poniamo

$$N = A - D = A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $N^2 = (0)_{ij}$ e ovviamente $[\mathbb{1}, N] = 0$, da cui segue che

$$e^{At} = e^{\mathbb{1}t}e^{Nt} = e^{\mathbb{1}t}(\mathbb{1} + Nt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}.$$

Pertanto, la soluzione con dato iniziale $x(0) = (2, 0)$ è data da

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-t)e^t \\ -2te^t \end{pmatrix}.$$

1.6 Esercizio 6

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax + B(t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$$

con condizioni iniziali $x(0) = (0, 1)$. Se ne determini la soluzione.

Soluzione

Per prima cosa, calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = \lambda^2 - 1,$$

da cui segue che $p(\lambda) = 0 \iff \lambda = \pm 1$.

Lo spettro di A è pertanto $\Sigma(A) = \{1, -1\}$.

Calcoliamo gli autospazi generalizzati.

$E_1 = \text{Ker}(A - \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue che

$$E_1 = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Allo stesso modo, $E_{-1} = \text{Ker}(A + \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue che

$$E_{-1} = \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Pertanto, una base di autovettori generalizzati è data da

$$v_1 = (1, 1), \quad v_2 = (0, 1)$$

da cui

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, $PDP^{-1} = A$ e quindi

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto, la soluzione con dato iniziale $x(0) = (0, 1)$ è data da

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At} \left(x(0) + \int_0^t e^{-As} B(s) ds \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ e^{-s} - e^s & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 2s + 1 \end{pmatrix} ds \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} se^{-s} \\ se^{-s} + se^s + e^s \end{pmatrix} ds \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - (1+t)e^{-t} \\ t(e^t - e^{-t}) - e^{-t} + 1 \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - (1+t)e^{-t} \\ t(e^t - e^{-t}) - e^{-t} + 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^t - t - 1 \\ e^t + e^{-2t} + e^{-t} - 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2 II: Conservative systems, flux and periodicity, equilibrium points, and some useful relations

2.1 Exercise 1

Given the following point particle conservative systems

1.
$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 & = F_1 = -kq_1 - 3\eta q_1^2 \\ 2\ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2 & = F_2 = -kq_2 - 3\eta q_2^2 \end{cases} \quad F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2;$$
2.
$$3\ddot{r} = F = -2aD_e(1 - e^{-a(r-r_e)})e^{-a(r-r_e)} \quad F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$
3.
$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 & = F_1 = -2q_2 \sin(q_1 q_2) + 6q_2 q_3 + 3q_1^2 \\ 2\ddot{q}_1 + 4\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 & = F_2 = -2q_1 \sin(q_1 q_2) + q_3 e^{q_2 q_3} + 6q_1 q_3 \\ \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 & = F_3 = q_2 e^{q_2 q_3} + 6q_1 q_2 \end{cases} \quad F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

say how many degrees of freedom each system is composed of and compute the total energy.

Solution

The number of degrees of freedom is given by the dimension of the space to which the vector of generalized coordinates belong: if $q \in \mathbb{R}^l$, the system has l degrees of freedom. To compute the total energy

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle + V(q) \quad (28)$$

we need to compute the potential energy and to extrapolate the mass matrix. The mass matrix can be read directly from the ODE system while to compute the potential energy we have to solve $F(q) = -\nabla V(q)$.

1

The system has 2 degrees of freedom. The mass matrix is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

therefore the kinetic energy is

$$K(\dot{q}) = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 \\ 2\dot{q}_1 + 3\dot{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + 3\dot{q}_2^2). \quad (30)$$

The energy potential is given by the following system of equation

$$\begin{cases} F_1 & = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = kq_1 + 3\eta q_1^2 \\ F_2 & = -\frac{\partial V}{\partial q_2} = kq_2 + 3\eta q_2^2 \end{cases}, \quad (31)$$

integrating the first equation we get

$$V(q) = \frac{k}{2} q_1^2 + \eta q_1^3 + f(q_2) \quad (32)$$

where $f(q_2)$ is an arbitrary function of q_2 . If we now insert 32 in the second of 31 we get

$$kq_2 + 3\eta q_2^2 = f'(q_2) \Rightarrow f(q_2) = \frac{k}{2}q_2^2 + \eta q_2^3. \quad (33)$$

In the end the total energy is

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + 3\dot{q}_2^2) + \frac{k}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \eta(q_1^3 + q_2^3). \quad (34)$$

2

The system has 1 one degree of freedom. The kinetic energy is simply $K(\dot{r}) = \frac{3}{2}\dot{r}^2$ while the potential energy can be found from

$$V'(r) = 2aD_e(1 - e^{-a(r-r_e)})e^{-a(r-r_e)} = D_e(1 - e^{-a(r-r_e)})^2. \quad (35)$$

The total energy is

$$H(r, \dot{r}) = \frac{3}{2}\dot{r}^2 + D_e(1 - e^{-a(r-r_e)})^2. \quad (36)$$

This potential is known as Morse potential and it is used to... FINIRE

3

The system has three degrees of freedom. The mass matrix is given by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

so the kinetic energy is

$$K(\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 \\ 2\dot{q}_1 + 4\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 + 4\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3 + \dot{q}_3^2). \quad (38)$$

The potential energy is given solving the equations

$$\begin{cases} F_1 &= -\frac{\partial V}{\partial q_1} = -2q_2 \sin(q_1 q_2) + 6q_2 q_3 + 3q_1^2 \\ F_2 &= -\frac{\partial V}{\partial q_2} = -2q_1 \sin(q_1 q_2) + q_3 e^{q_2 q_3} + 6q_1 q_3 \\ F_3 &= -\frac{\partial V}{\partial q_3} = q_2 e^{q_1 q_2} + 6q_2 q_3 \end{cases} \quad (39)$$

Integrating the first equation we get

$$V(q) = -2\cos(q_1 q_2) - 6q_1 q_2 q_3 - q_1^3 + f(q_2, q_3) \quad (40)$$

where $f(q_2, q_3)$ is an arbitrary function of q_2 and q_3 ; putting in the second equation we get

$$-2q_1 \sin(q_1 q_2) + q_3 e^{q_2 q_3} + 6q_1 q_3 = -2q_1 \sin(q_1 q_2) + 6q_1 q_3 - \frac{\partial f}{\partial q_2} \Rightarrow f(q_1, q_2) = -e^{q_2 q_3} + h(q_3), \quad (41)$$

where $h(q_3)$ is an arbitrary function of q_3 . For the moment we have

$$V(q) = -2\cos(q_1q_2) - 6q_1q_2q_3 - q_1^3 - e^{q_2q_3} + h(q_3); \quad (42)$$

putting into the third equation we have

$$q_2e^{q_1q_2} + 6q_1q_2 = 6q_1q_2 + q_2e^{q_2q_3} + h'(q_3) \Rightarrow h(q_3) = c = 0. \quad (43)$$

The total energy is therefore

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q_1^2 + 4q_1\dot{q}_2 + 4q_2^2 + 2\dot{q}_2\dot{q}_3 + \dot{q}_3^2) - 2\cos(q_1q_2) - 6q_1q_2q_3 - q_1^3 - e^{q_2q_3}. \quad (44)$$

2.2 Exercise 2

Given the following forces and their domains

1. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(q_1, q_2, q_3) = (q_2^2q_3^3, 2q_1q_2q_3^3, 3q_1q_2^2q_3^2)$;
2. $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(q_1, q_2, q_3) = (3q_1^2q_3, q_3^2, q_1^3 + 2q_2q_3)$;
3. $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(q_1, q_2) = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2}(-q_2, q_1)$;
4. $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(q_1, q_2) = \frac{1}{(q_1^2 + q_2^2)^2}(q_2^2 - q_1^2, -2q_1q_2)$;
5. $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(q_1, q_2, q_3) = (q_2 + e^{q_3}, q_1, q_1e^{q_3})$, where $\mathcal{S} := \{ta \mid a \in A \subset \mathbb{R}^3, t \in [0, 1]\}$,

say if the mechanical systems associated are conservative or not.

Solution

A mechanical system is said to be conservative if the vector field representing the force is conservative. A vector field is conservative if its line integral over an arbitrary curve C is path-independent (so its value depends only on the endpoints of the curve) or, equivalently, if its circulation is vanishing. If we are in a simply connected set a sufficient condition to be conservative is that the curl of the vector field F

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ F_{q_1} & F_{q_2} & F_{q_3} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_{q_3}}{\partial q_2} - \frac{\partial F_{q_2}}{\partial q_3} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_{q_1}}{\partial q_3} - \frac{\partial F_{q_3}}{\partial q_1} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_{q_2}}{\partial q_1} - \frac{\partial F_{q_1}}{\partial q_2} \right) \quad (45)$$

is zero. Indeed, using Stoke theorem we have

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot d\Sigma = \oint_{\partial\Sigma=C} F \cdot ds = 0 \Rightarrow \nabla \times F = 0. \quad (46)$$

To use Stokes' theorem, we just need to find a surface whose boundary is C . If the domain of F is simply connected, so if it is path-connected and if every loop can be contracted to a point, we can always find such a surface. The surface can just go around any hole that is in the middle of the domain. With such a surface along which $\nabla \times F = 0$, we can use Stokes' theorem to show that the circulation around C is

zero. Since we can do this for any closed curve, we can conclude that F is conservative. On the other hand, if the set is not simply connected, but has a hole going all the way through it, then $\nabla \times F = 0$ is not a sufficient condition for path-independence. In this case, if C is a curve that goes around the hole, then we cannot find a surface that stays inside that domain whose boundary is C . Without such a surface, we cannot use Stokes' theorem to conclude that the circulation around C is zero. In that cases we need to compute directly the scalar function such that $F = -\nabla V$: if exist than F is conservative thanks to gradient theorem otherwise it is not.

1

The domain of F is simply connected and

$$\nabla \times F = 0. \quad (47)$$

The vector field is conservative and so the system.

2

The domain of F is simply connected and

$$\nabla \times F = 0. \quad (48)$$

The vector field is conservative and so the system.

3

The domain is not simply connected so the curl gives no information. We have to indicate that exist a scalar function V such that $F = -\nabla V$ to show the field is conservative or to find a curve along which the circulation is not zero to show the field is not conservative. If we take every loop around the hole we can see that the circulation is not zero. Indeed, let be $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$ with $t \in [0, 2\pi]$ and $R \in \mathbb{R}$ a parameterization of C , therefore

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} (-R\sin(t), R\cos(t)) \cdot (-R\sin(t), R\cos(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned} \quad (49)$$

The vector field is not conservative and so the system.

4

The domain is not simply connected so the curl gives no information. Taken the same loop as before we get

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} (\sin^2(t) - \cos^2(t), -2\sin(t)\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = \\ &= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \sin^3(t) - \sin(t)\cos^2(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

So or we try again with other loops or we try to construct a scalar function such that $F = -\nabla V$, namely

$$\begin{cases} \frac{q_2^2 - q_1^2}{(q_1^2 + q_2^2)^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} \\ \frac{-2q_1 q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_2}. \end{cases} \quad (51)$$

Let us search for a scalar function $V(q_1, q_2)$; the first equation gives us

$$V(q_1, q_2) = -\frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} + f(q_2) \quad (52)$$

where $f(q_2)$ is an arbitrary function of q_2 . From the second equation we have

$$\frac{-2q_1 q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^2} = \frac{-2q_1 q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^2} + f'(q_2) \Rightarrow f(q_2) = c; \quad (53)$$

so there exist a scalar function $V(q_1, q_2)$ and the system is conservative.

5

The set is a star one, therefore it is simply connected; the curl is

$$\nabla \times F = 0. \quad (54)$$

The vector field is conservative and so the system.

2.3 Exercise 3

Given the following dynamical systems

1. $\ddot{y} + y - \varepsilon \left(\frac{\dot{y}^3}{3} - \dot{y} \right) = 0, \quad \varepsilon > 0;$
2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+.$

study the stability of the equilibrium points.

Solution

Given a dynamical system $\dot{x} = f(x)$, the equilibrium points are defined as those point x_{eq} where $f(x_{eq}) = 0$. Their stability can be studied using linearization or Lyapunov direct method. The linearized version of the system $\dot{x} = f(x)$ around an equilibrium point x_{eq} is given by

$$\dot{x} = J(x_{eq})(x - x_{eq}), \quad (55)$$

where $J(x_{eq})$ is the jacobian matrix computed at the equilibrium point. If all the eigenvalues have negative real part, x_{eq} is an asymptotically stable point while if there exist at least one eigenvalue with positive real part, x_{eq} is unstable. All other cases give no information of the stability of x_{eq} indeed in these cases can happen that the full non linear system behave completely differently.

A second possibility is to use a Lyapunov function $L(x)$: let be x_{eq} an equilibrium point for the full system and let be $L(x) \in C^1(\mathbb{R}) : B(x_{eq}) \rightarrow \mathbb{R}$ such that

- $L(x_{eq}) = 0$,
- $L(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_{eq}) \setminus \{x_{eq}\}$.

If

- $\dot{W}(x) \leq 0 \quad \forall x \in B(x_{eq})$ then x_{eq} is a stable equilibrium point;
- $\dot{W}(x) < 0 \quad \forall x \in B(x_{eq})$ then x_{eq} is an asymptotically stable equilibrium point
- $\dot{W}(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_{eq})$ then x_{eq} is an unstable equilibrium point.

When we use the Lyapunov function method, it is advisable to use as the first candidate of Lyapunov function the quadratic function $L(x) = \frac{1}{2}\langle x - x_{eq}, x - x_{eq} \rangle$ which is positive definite in any neighborhood $B(x_{eq})$ of x_{eq} . In the case we want to prove stability, we can try using constants of motion C since for them it is guaranteed that $\dot{C} = 0$.

1

Let $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ so that the corresponding system is given by

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon \left(\frac{x_2^3}{3} - x_2 \right) \end{cases} \quad (56)$$

The origin $x_1 = 0, x_2 = 0$ is the only equilibrium point $x_{eq} = (0, 0)$; the jacobian matrix of the linearized system is given by

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (57)$$

therefore

$$J(x_{eq}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

whose eigenvalues are $\lambda_{1,2} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}$, since $\mathcal{R}e(\lambda_{1,2}) < 0$ the equilibrium point is asymptotically stable.

2

This system is known as Lokta-Volterra or pray-predator system; it is used in biology as the simplest model for predation. The equilibrium point are given by the system

$$\begin{cases} x(\alpha - \beta y) &= 0 \\ -y(\gamma - \delta x) &= 0 \end{cases} \quad (59)$$

whose solution are $x_{eq1} = (0, 0)$ and $x_{eq2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta} \right)$. The jacobian matrix is

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix} \quad (60)$$

and computed at the equilibrium points take the values

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

In the case of x_{eq1} the jacobian matrix has eigenvalues $\lambda_1 = \alpha$ and $\lambda_2 = -\gamma$, therefore x_{eq1} is an unstable equilibrium point. In the case of x_{eq2} the jacobian matrix has eigenvalues $\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma}$ and $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma}$; the linearization method gives us no information. Let us try to find a Lyapunov function. We can find a constant of motion eliminating time from the system to get one equation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \frac{\delta x - \gamma}{\beta y - \alpha} \Rightarrow \frac{\beta y - \alpha}{y} dy + \frac{\delta x - \gamma}{x} dx = 0, \quad (62)$$

the solution can be found by separation of variables

$$V = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y), \quad (63)$$

where V is a constant quantity depending on the initial conditions. Let us define the function

$$l(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y) - V; \quad (64)$$

it is clear that $\dot{l}(x, y) = 0$, moreover

$$l\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = -V + \gamma \left[1 - \ln\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right] + \alpha \left[1 - \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right], \quad (65)$$

so we can define the Lyapunov function

$$L(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y) - \gamma \left[1 - \ln\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right] - \alpha \left[1 - \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] \quad (66)$$

that satisfy $L\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$ and $L(x, y) > 0 \forall x, y \in B(x_{eq})$, indeed computing the hessian matrix

$$H_{L(x,y)}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_{L(x,y)}(x, y)) = \frac{\gamma}{x^2} \frac{\alpha}{y^2} \quad (67)$$

therefore we have

$$\det\left(H_{L(x,y)}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)\right) = \frac{\delta^2 \beta^2}{\gamma \alpha} > 0, \quad H_{L(x,y)11}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\gamma}{\delta^2} > 0 \quad (68)$$

so x_{eq} is a minimum for the Lyapunov function. Moreover, by construction $\dot{L}(x, y) = 0$ and so x_{eq} is a stable equilibrium point.

2.4 Esercizio 4

Si consideri un sistema autonomo del primo ordine con flusso $\phi(t, x)$ di periodo T .

1. Dimostrare che la definizione di periodo non dipende dal punto sulla traiettoria, ovvero che ogni punto dell'orbita ha lo stesso periodo.
2. Dimostrare che $\phi(t + nT, x) = \phi(t, x) \forall n \in \mathbb{N}$.

Soluzione

1. Sia $y = \phi(\bar{t}, x)$ per un qualche tempo \bar{t} .

Allora

$$\phi(t + T, y) = \phi(t + T, \phi(\bar{t}, x)) = \phi(t + T + \bar{t}, x) = \phi(t + \bar{t}, x) = \phi(t, \phi(\bar{t}, x)) = \phi(t, y)$$

dove nella seconda e nella quarta uguaglianza si è usata la proprietà di gruppo della soluzione $\phi(t, x)$.

2. Procediamo per induzione su $n > 1$, usando ancora una volta la proprietà di gruppo:

- $n = 2$: $\phi(t + 2T, x) = \phi(t + T + T, x) = \phi(t + T, x) = \phi(t, x)$.
- $n \rightarrow n + 1$: $\phi(t + (n + 1)T, x) = \phi(t + T + nT, x) = \phi(t + T, x) = \phi(t, x)$.

2.5 Esercizio 5

Dimostrare che data una qualsiasi matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si ha

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}.$$

Soluzione

Sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ l'operatore lineare rappresentato dalla matrice A . Allora è possibile trovare una base in cui T sia rappresentato da una matrice in forma canonica di Jordan. Si può quindi scrivere, presa Q la matrice del cambiamento di base, $A = Q^{-1}JQ$ dove J è una matrice in forma canonica, i.e.

$$J = \begin{pmatrix} \Lambda_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_{n_r} \end{pmatrix}$$

con $n_1 + \dots + n_r = n$ e Λ_{n_i} blocchi elementari di Jordan.

In particolare, si ha $J = N + \Lambda$ con N nilpotente e Λ diagonale tali che $[N, \Lambda] = 0$. Allora, $e^J = e^N e^\Lambda$.

Ma

$$e^N = \mathbb{1} + \sum_{k \geq 1} \frac{N^k}{k!}$$

e $\det(e^N) = \det \mathbb{1} = 1$ perché le matrici N^k hanno elementi non nulli solo sulla k -esima sovradiagonale.

Si ha quindi

$$\det(e^J) = \det(e^N) \det(e^\Lambda) = \det(e^\Lambda).$$

Allora

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \det(Q^{-1}e^JQ) = \det(Q^{-1}) \det(e^J) \det(Q) = \\ &= \det(e^J) = \det(e^\Lambda) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = \\ &= e^{\text{tr}(J)} = e^{\text{tr}(Q^{-1}JQ)} = e^{\text{tr}(A)} \end{aligned}$$

e quindi

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}.$$

2.6 Esercizio 6

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
2. Si determinino i dati iniziali per cui esiste $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ e si calcoli il valore di tale limite.

Soluzione

1. L'unico punto di equilibrio è $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Per studiarne la stabilità cerchiamo gli autovalori della matrice A calcolandone il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \lambda(2 + \lambda)(1 - \lambda) - 6 - 6\lambda + 2(2 + \lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2),$$

per cui $p(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$.

Ma allora $\Re(\lambda_1) < 0, \Re(\lambda_{2,3}) = 0$, cioè $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è un punto di equilibrio stabile.

2. Siano ora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ autovettori associati rispettivamente agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, con \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 necessariamente a coefficienti complessi.

La soluzione generale è data da

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 e^{-t} + \alpha_2 \mathbf{v}_2 e^{-i\sqrt{2}t} + \alpha_3 \mathbf{v}_3 e^{i\sqrt{2}t}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = (x_0, y_0, z_0).$$

Allora $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ esiste $\iff \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

In questo caso, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

Ma il vettore \mathbf{v}_1 è l'autovettore associato all'autovalore λ_1 , cioè è tale che $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$:

$$\begin{cases} -2x + 2y = -x \\ -3x + y - z = -y \\ 3x - 2y = -z \end{cases}$$

da cui segue che $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -4)$.

Ma allora i dati iniziali corrispondenti sono

$$(x_0, y_0, z_0) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 = \alpha_1 (2, 1, -4).$$

3 III: Equilibrium points and unidimensional systems

3.1 Exercise 1

Given a body of unitary mass subjected to the following forces

1. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = (q_1 e^{q_2}, q_2 + a q_1^2 e^{q_2})$ $a \in \mathbb{R}$;
2. $F : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = (q_1 + 3\cos(q_2), \cos(q_2) + q_1 - 1)$;
3. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F = ax^3 + cx$ $a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$;

study the equilibrium points.

Solution

As we know from the previous exercises sheet, we can use linearization of Lyapunov function.

1

The equilibrium points are given by the system

$$\begin{cases} q_1 e^{q_2} & = 0 \\ q_2 + a q_1^2 e^{q_1} & = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{eq} = (0, 0). \quad (69)$$

The Jacobian matrix is

$$J(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} e^{q_2} & 2a q_1 e^{q_1} \\ q_1 e^{q_2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Since $\mathcal{R}e(\lambda_{1,2}) > 0$, the point x_{eq} is unstable.

2

The equilibrium points are given by the system

$$\begin{cases} q_1 + 3\cos(q_2) & = 0 \\ q_1 - 1 + \cos(q_2) & = 0 \end{cases}, \quad (71)$$

inserting the first equation in the second we get

$$q_1 - \frac{q_1}{3} - 1 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{3}{2} \quad (72)$$

and, at this point, from the first we get

$$\cos(q_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}. \quad (73)$$

Therefore the equilibrium points are

$$x_{eq1} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \quad x_{eq2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \quad (74)$$

The Jacobian matrix is

$$J(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 & -3\sin(q_2) \\ 1 & -\sin(q_2) \end{pmatrix}; \quad (75)$$

computed at the equilibrium points we have

$$J(x_{eq1}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad J(x_{eq2}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad (76)$$

The eigenvalues are

$$\begin{aligned} p_{ch}^{J(x_{eq1})}(\lambda) &= (1 - \lambda) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2} - 5\sqrt{3}}}{2}; \\ p_{ch}^{J(x_{eq2})}(\lambda) &= (1 - \lambda) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \right) - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2} + 5\sqrt{3}}}{2}. \end{aligned} \quad (77)$$

In both cases there is at least one eigenvalue with positive real part; the equilibrium points are unstable.

3

The equilibrium point are given by

$$ax^3 + cx = x(ax^2 + c) = 0 \Rightarrow x_{eq1} = 0, \quad x_{eq2} = +\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_{eq3} = -\sqrt{-\frac{c}{a}}. \quad (78)$$

The jacobian matrix reduces to the ordinary derivative and we have

$$F'(x) = 3ax^2 + c, \quad (79)$$

so we have

$$\begin{aligned} F'(x_{eq1}) &= c; \\ F'(x_{eq2}) &= 3ax^2 + c; \\ F'(x_{eq3}) &= 3ax^2 + c. \end{aligned} \quad (80)$$

First of all $a \neq 0$ otherwise equilibrium point x_{eq2} and x_{eq3} are not well defined. The first equilibrium point is stable if $c < 0$ and unstable if $c > 0$. For the second equilibrium point, since $ax_{eq1}^2 + c = 0$, we have $F'(x_{eq1}) = -2c$ so if $c > 0$ the equilibrium point is stable while if $c < 0$ it is unstable. Same considerations hold for x_{eq2} .

3.2 Exercise 2

A body of unitary mass is subjected to the following potentials

1. $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, V(q_1) = \frac{1}{2}(q_1 - \sqrt{3})^2 - \ln(q_1)$
2. $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, V(q_1) = \alpha q_1^4 + \beta q_1^2 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

study the potential and classify the equilibrium points.

Solution

We can use Lagrange-Dirichlet theorem. The theorem concerns conservative holonomic mechanical systems with finite degrees of freedom and states that every strict local minimum of the potential is a Lyapunov stable equilibrium point of the dynamics. Moreover in $D = 1$ maximum of the function are unstable equilibrium points.

1

The derivative of the potential is

$$V'(q_1) = q_1 - \sqrt{3} - \frac{1}{q_1} \quad (81)$$

therefore the stationary points are given by

$$V'(q_1) = q_1 - \sqrt{3} - \frac{1}{q_1} = 0 \Rightarrow q_1^2 - \sqrt{3}q_1 - 1 = 0; \quad (82)$$

they are

$$(q_1)_{eq_1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}, \quad (q_1)_{eq_2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}. \quad (83)$$

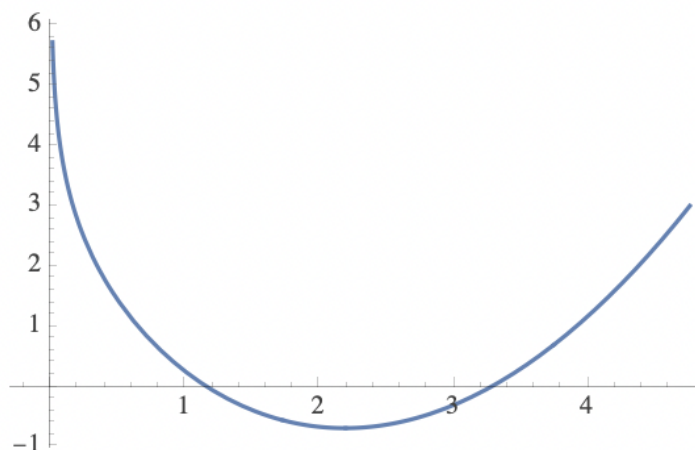
The second derivative is

$$V''(q_1) = 1 + \frac{1}{q^2}; \quad (84)$$

since it is positive in $(q_1)_{eq_2}$, follow that $(q_1)_{eq_2}$ is a stable equilibrium point. We have to throw away $(q_1)_{eq_1}$ since the potential is defined only for \mathbb{R}^+ , moreover

$$\lim_{q_1 \rightarrow 0^+} V(q_1) = +\infty, \quad \lim_{q_1 \rightarrow +\infty} V(q_1) = +\infty. \quad (85)$$

The plot is



2

This is the potential of the Higgs in the Standard Model. The derivative of the potential is

$$V'(q_1) = 4\alpha q_1^3 + 2\beta q_1 \quad (86)$$

therefore the stationary points are given by

$$V'(q_1) = 4\alpha q_1^3 + 2\beta q_1 = 0. \quad (87)$$

If $\alpha = 0, \beta \in \mathbb{R}^+$ we have

$$V'(q_1) = 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \quad (88)$$

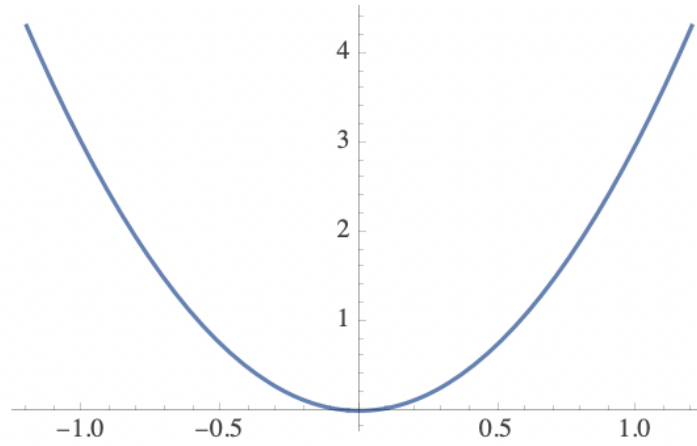
and

$$V''((q_1)_{eq}) = 2|\beta| > 0. \quad (89)$$

The point $(q_1)_{eq}$ is a minimum, so stable, and

$$\lim_{q_1 \rightarrow \pm\infty} V(q_1) = +\infty. \quad (90)$$

The plot is



If $\alpha = 0, \beta \in \mathbb{R}^-$ we have

$$V'(q_1) = -2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \quad (91)$$

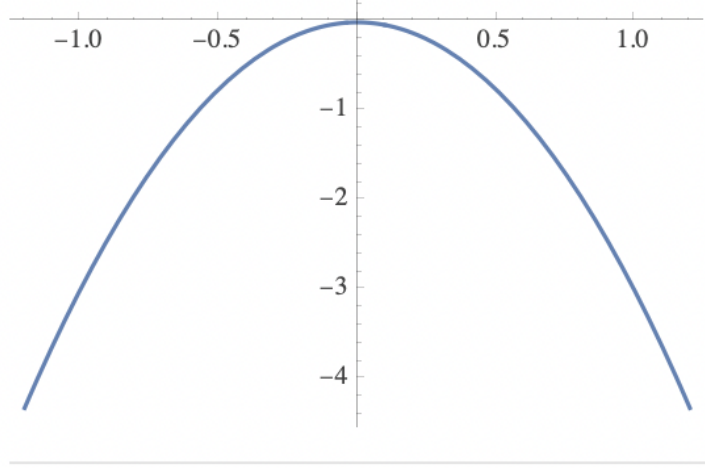
and

$$V''((q_1)_{eq}) = -2|\beta| < 0. \quad (92)$$

The point $(q_1)_{eq}$ is a maximum, so unstable, and

$$\lim_{q_1 \rightarrow \pm\infty} V(q_1) = -\infty. \quad (93)$$

The plot is



If $\alpha \in \mathbb{R}^+, \beta = 0$ we have

$$V'(q_1) = 4|\alpha|q_1^3 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \quad (94)$$

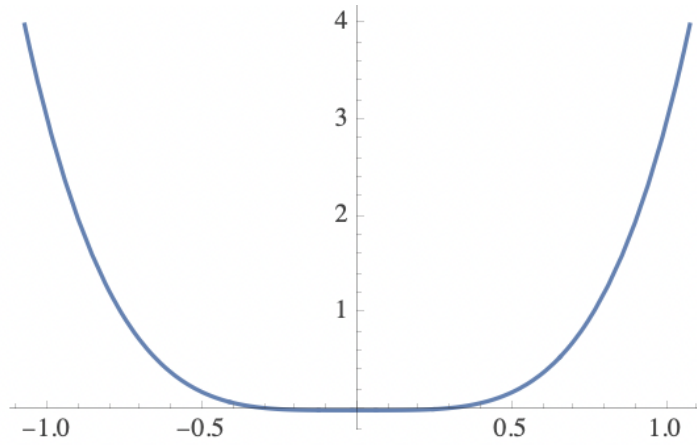
and

$$V''((q_1)_{eq}) = 12|\alpha|(q_1)_{eq}^2 = 0. \quad (95)$$

We have

$$\lim_{q_1 \rightarrow \pm\infty} V(q_1) = +\infty, \quad (96)$$

and the point $(q_1)_{eq}$ is a minimum and so stable. The plot is



If $\alpha \in \mathbb{R}^-, \beta = 0$ we have

$$V'(q_1) = -4|\alpha|q_1^3 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \quad (97)$$

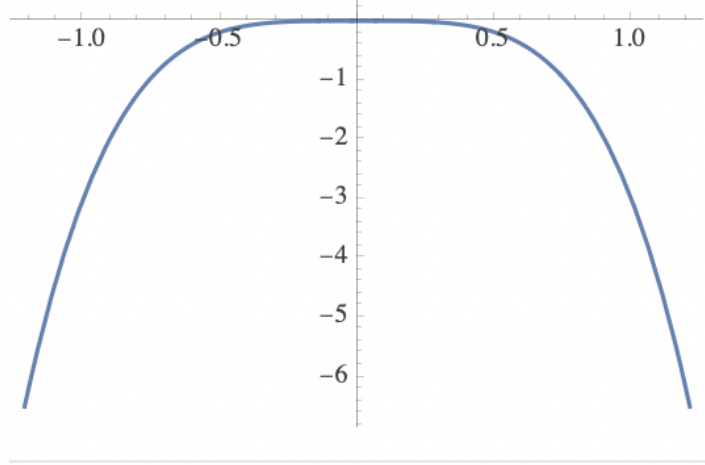
and

$$V''((q_1)_{eq}) = -12|\alpha|(q_1)_{eq}^2 = 0. \quad (98)$$

We have

$$\lim_{q_1 \rightarrow \pm\infty} V(q_1) = -\infty, \quad (99)$$

and the point $(q_1)_{eq}$ is a maximum and so unstable. The plot is



If $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ we have

$$V'(q_1) = 4|\alpha|q_1^3 + 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \quad (100)$$

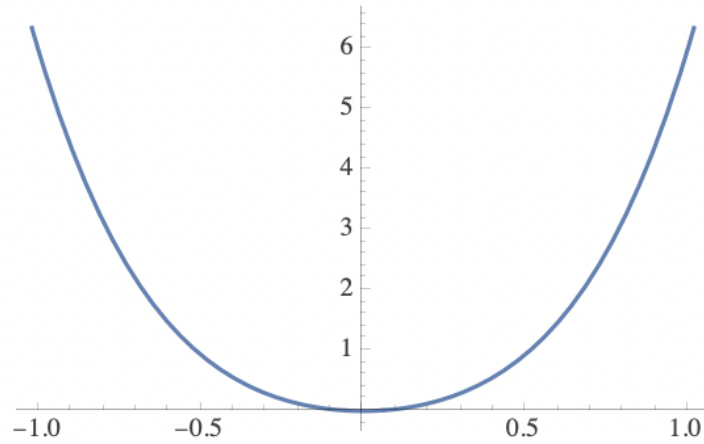
and

$$V''((q_1)_{eq}) = 12|\alpha|(q_1)_{eq}^2 + 2|\beta| > 0. \quad (101)$$

The point $(q_1)_{eq}$ is a minimum, so stable, and

$$\lim_{q_1 \rightarrow \pm\infty} V(q_1) = +\infty. \quad (102)$$

The plot is



If $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^-$ we have

$$V'(q_1) = -4|\alpha|q_1^3 - 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \quad (103)$$

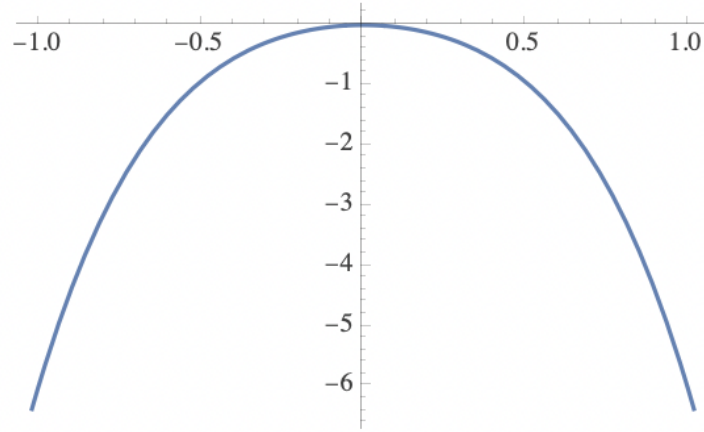
and

$$V''((q_1)_{eq}) = -12|\alpha|(q_1)_{eq}^2 - 2|\beta| < 0. \quad (104)$$

The point $(q_1)_{eq}$ is a maximum, so unstable, and

$$\lim_{q_1 \rightarrow \pm\infty} V(q_1) = +\infty. \quad (105)$$

The plot is



If $\alpha \in \mathbb{R}^- \beta \in \mathbb{R}^+$ we have

$$V'(q_1) = -4|\alpha|q_1^3 + 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq1} = 0, (q_1)_{eq2} = +\sqrt{\frac{1}{2} \frac{|\beta|}{|\alpha|}}, (q_1)_{eq3} = -\sqrt{\frac{1}{2} \frac{|\beta|}{|\alpha|}} \quad (106)$$

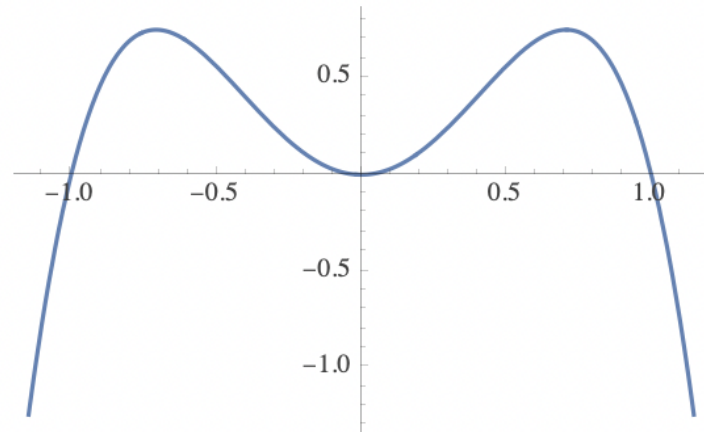
and

$$V''(q_1) = -12|\alpha|q_1^2 + 2|\beta|. \quad (107)$$

We have $V((q_1)_{eq1}) > 0$ so $(q_1)_{eq1}$ is a minimum and so stable, $V((q_1)_{eq2}) = V((q_1)_{eq3}) < 0$ so $(q_1)_{eq2}$ and $(q_1)_{eq3}$ are maximum and so unstable. Moreover

$$\lim_{q_1 \rightarrow \pm\infty} V(q_1) = -\infty. \quad (108)$$

The plot is



If $\alpha \in \mathbb{R}^+ \beta \in \mathbb{R}^-$ we have

$$V'(q_1) = +4|\alpha|q_1^3 - 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq1} = 0, (q_1)_{eq2} = +\sqrt{\frac{1}{2} \frac{|\beta|}{|\alpha|}}, (q_1)_{eq3} = -\sqrt{\frac{1}{2} \frac{|\beta|}{|\alpha|}} \quad (109)$$

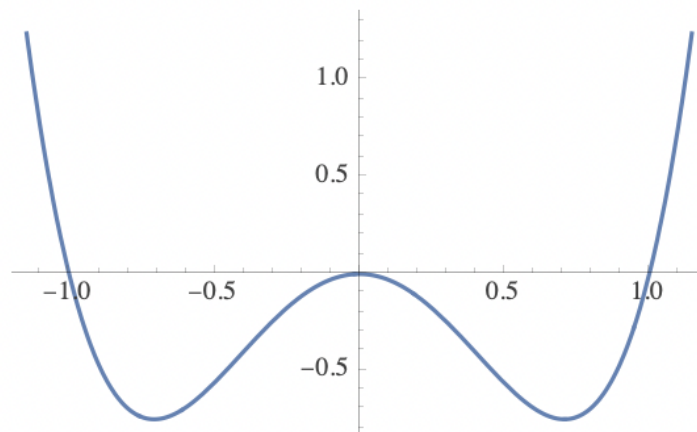
and

$$V''(q_1) = +12|\alpha|q_1^2 - 2|\beta|. \quad (110)$$

We have $V((q_1)_{eq1}) < 0$ so $(q_1)_{eq1}$ is a maximum and so unstable, $V((q_1)_{eq2}) = V((q_1)_{eq3}) > 0$ so $(q_1)_{eq2}$ and $(q_1)_{eq3}$ are minimum and so stable. Moreover

$$\lim_{q_1 \rightarrow \pm\infty} V(q_1) = +\infty. \quad (111)$$

The plot is



3.3 Esercizio 3

Si consideri l'equazione

$$\ddot{x} = x - \frac{1}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Determinare una costante del moto del sistema.
3. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
4. Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale e ricavarne un'analisi del moto nel piano delle fasi.

Soluzione

1. Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato all'equazione è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \frac{1}{x^3} \end{cases}$$

2. Il sistema ammette come energia potenziale $V(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$, poiché vale che $\ddot{x} = -V'(x)$. Una costante del moto è data pertanto dall'energia meccanica

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}.$$

3. Si ha che $\dot{x} = 0$ se $y = 0$ e $\dot{y} = 0$ se $x = \pm 1$, pertanto i due punti di equilibrio del sistema sono $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$.

Per studiarne la stabilità, calcoliamo gli autovalori della matrice del sistema linearizzato nei punti P_1 e P_2 :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \frac{3}{x^4} & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che

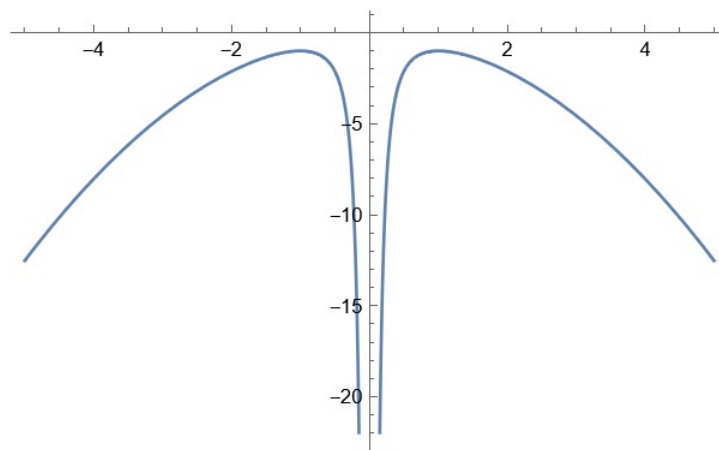
$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda = \pm 2$. Pertanto, P_1 e P_2 sono punti di sella.

Si noti che lo stesso risultato poteva essere ottenuto studiando i punti critici dell'energia potenziale $V(x)$.

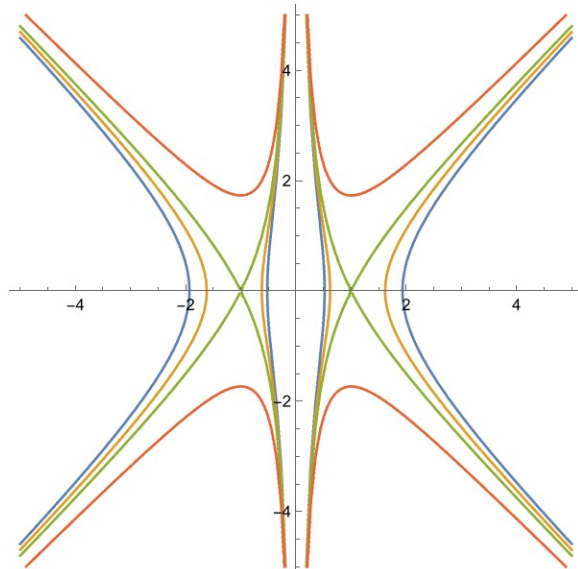
4. Per quanto riguarda lo studio dell'energia potenziale, si ha che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = -\infty$ e le uniche intersezioni con gli assi sono in $(\pm 1, 0)$ (punti di massimo). Inoltre, in $x = 0$ si ha un asintoto verticale.

Un grafico qualitativo dell'energia potenziale è pertanto il seguente:



Da $E = \frac{y^2}{2} + V(x)$ si ha $y = \pm \sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò, nel piano delle fasi si hanno curve simmetriche rispetto all'asse x per valori di x tali che $V(x) \leq E$.

A partire dal grafico dell'energia potenziale si può quindi fare uno studio qualitativo del moto nel piano delle fasi, ottenendo



3.4 Esercizio 4

Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{3}{4}e^{x^2}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico che descrive il moto.
2. Determinare una costante del moto del sistema.
3. Studiare qualitativamente il moto, i.e. partendo dal grafico di $V(x)$, identificare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità, rappresentare le curve di livello al variare dell'energia, identificare i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
4. Se esistono moti periodici, calcolarne il periodo in forma di integrale definito.
5. Se esistono moti illimitati, dire se il tempo per arrivare all'infinito è finito o no e se il moto esiste globalmente.

Soluzione

1. L'equazione del moto è data da

$$\ddot{x} = -V'(x) = \frac{3}{2}xe^{x^2}.$$

Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato è descritto dalle equazioni

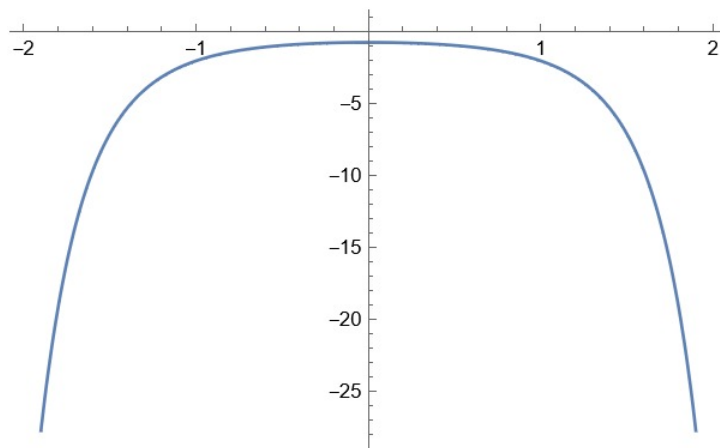
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{3}{2}xe^{x^2} \end{cases}.$$

2. Una costante del moto è data dall'energia meccanica

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}e^{x^2}.$$

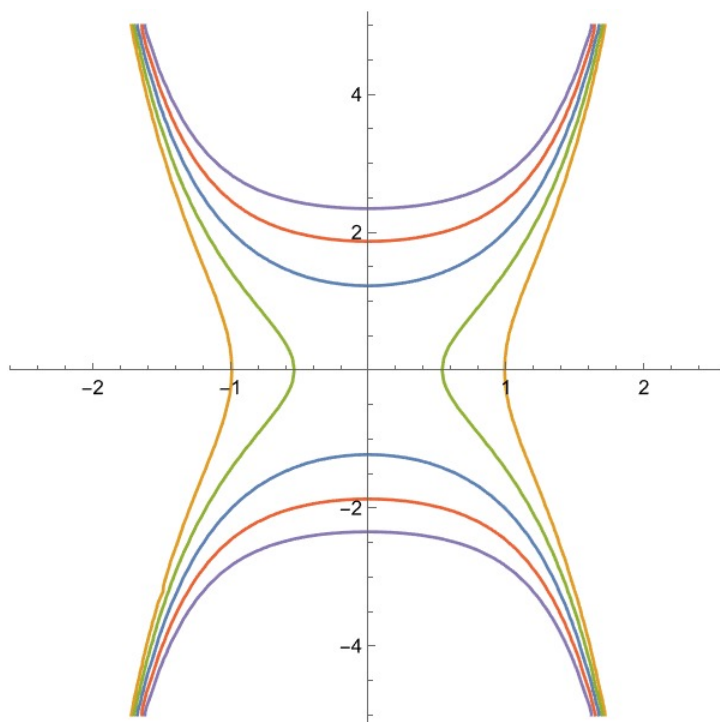
3. Si noti che $V(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = -\infty$. Inoltre, $V'(x) \leq 0$ e si ha che $V'(x) = 0$ per $x = 0$. Infine, $V''(x) = -\frac{3}{2}e^{x^2} - 3x^2e^{x^2} \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Il grafico dell'energia potenziale è, pertanto, il seguente:



L'unico punto di equilibrio del sistema è $(0, 0)$ ed è un punto di equilibrio instabile.

Il moto nel piano delle fasi è dato da



Per tutti i dati iniziali, i moti sono illimitati (moti aperti). Non esistono, pertanto, moti periodici.

4. Dal punto precedente si ha che non esistono moti periodici.

5. Fissato un dato iniziale $x(0)$, il tempo per arrivare all'infinito è dato da

$$t_\infty = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(2(E - V(x)))}} = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2E + \frac{3}{2}e^{x^2}}}.$$

Si ha, però, che

$$\frac{1}{\sqrt{2E + \frac{3}{2}e^{x^2}}} \sim \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Pertanto, l'integrale converge all'infinito, $t_\infty < +\infty$ e il moto non esiste globalmente.

3.5 Esercizio 5

Si consideri l'equazione

$$\ddot{x} = -2x(2x^2 + x - 2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Determinare una costante del moto del sistema.
3. Studiare qualitativamente il moto, i.e. partendo dal grafico di $V(x)$ (che si può ricavare ricordando che $\ddot{x} = -V'(x)$), identificare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità, rappresentare le curve di livello al variare dell'energia, identificare i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
4. Se esistono moti periodici, calcolarne il periodo in forma di integrale definito.

Soluzione

1. Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato all'equazione è

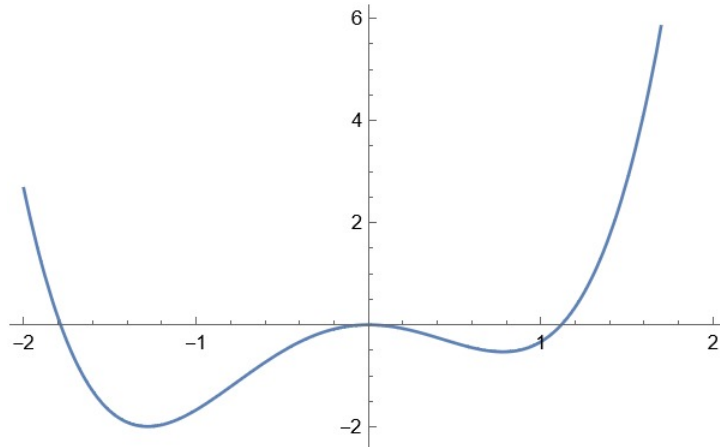
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x(2x^2 + x - 2) \end{cases}.$$

2. Il sistema ammette come energia potenziale $V(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$, poiché vale che $\ddot{x} = -V'(x)$. Una costante del moto è data pertanto dall'energia meccanica

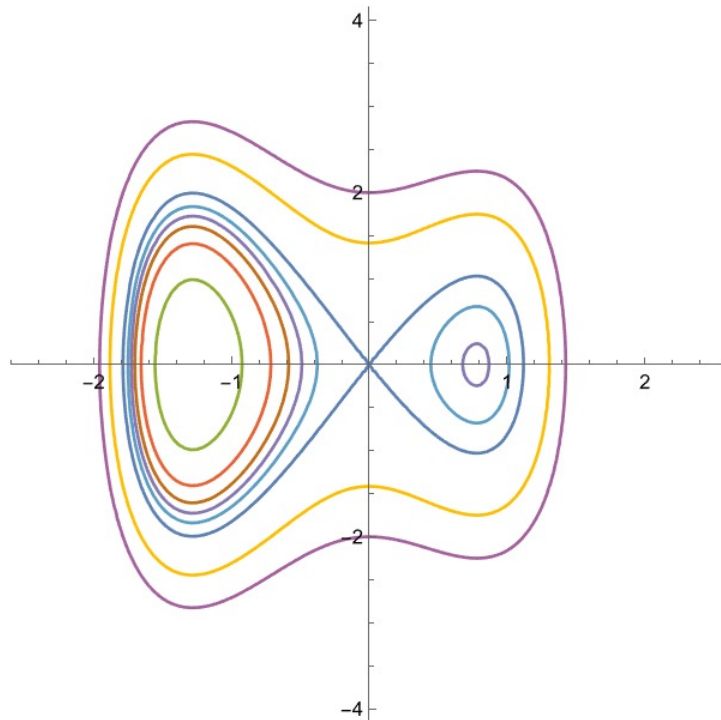
$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2.$$

3. Si noti che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$, $V(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{1}{3}(-1 - \sqrt{19})$ e $x \geq \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{19})$, $V(x) < 0$ per $\frac{1}{3}(-1 - \sqrt{19}) < x < \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{19})$. Inoltre, $V'(x) = 0$ per $x = 0, \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17})$ (in particolare, $x = 0$ è un punto di massimo e $x = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17})$ sono punti di minimo) e $V''(x) = 0$ per $x = \frac{1}{6}(-1 \pm \sqrt{13})$.

Il grafico dell'energia potenziale è pertanto il seguente:



I punti di equilibrio del sistema sono $(0, 0)$, che è instabile, e $(\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17}), 0)$, che sono stabili. Il moto nel piano delle fasi è dato da



Dal grafico dell'energia potenziale segue che il moto è periodico se $E \neq 0$ e chiuso aperiodico se $E = 0$.

4. Il periodo del moto è dato da

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}$$

per $E \neq 0$, dove x_- e x_+ sono le soluzioni di $E = V(x)$.

4 IV Conserved quantities and unidimensional systems

4.1 Exercise 1

Given the following dynamical systems

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -[1 - 2\sqrt{1 - \cos(x)^2}] \end{cases};$$
$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cosh(y) \\ \frac{dy}{dt} = \sinh(x) \end{cases}$$

compute a conserved quantity.

Solution

For a first order system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (112)$$

a scalar-valued function $H(x)$ is a conserved quantity of the system if, for all time and initial conditions in some specific domain $\frac{dH}{dt} = 0$. Using the multivariate chain rule

$$\frac{dH}{dt} = \nabla H \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla H \cdot f(x, t) \quad (113)$$

so that the definition may be written as

$$\nabla H \cdot f(x, t) = 0, \quad (114)$$

which contains information specific to the system and can be helpful in finding conserved quantities, or establishing whether or not a conserved quantity exists. If the system is conservative we know that a conserved quantity is the energy.

1

The system can be rewritten as

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -[1 - 2\sin(x)] \end{cases} \quad (115)$$

if $\sin(x) > 0$ or

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -[1 + 2\sin(x)] \end{cases} \quad (116)$$

if $\sin(x) < 0$. The equation we need to solve is

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} 2y - \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} [1 \pm \sin(x)] = 0. \quad (117)$$

Let us search for $H(x, y) = X(x) + Y(y)$,

$$2yX' - [1 \pm \sin(x)]Y' = 0 \Rightarrow \frac{Y'}{2y} = \frac{X'}{1 \pm \sin(x)}; \quad (118)$$

since these are two function of different variables that are equal, they must be equal to the same constant (say one for simplicity)

$$\frac{Y'}{2y} = 1, \quad \frac{X'}{1 \pm \sin(x)} = 1 \quad (119)$$

integrating we get

$$H(x, y) = X(x) + Y(y) = x \mp \cos(x) + y^2. \quad (120)$$

2

The equation we need to solve is

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \cosh(y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \sinh(x) = 0. \quad (121)$$

Let us search for $H(x, y) = X(x) + Y(y)$,

$$\cosh(y)X' + \sinh(x)Y' = 0 \Rightarrow \frac{Y'}{\cosh(y)} = \frac{X'}{\sinh(x)}; \quad (122)$$

since these are two function of different variables that are equal, they must be equal to the same constant (say one for simplicity)

$$\frac{Y'}{\cosh(y)} = 1, \quad \frac{X'}{\sinh(x)} = 1 \quad (123)$$

integrating we get

$$H(x, y) = X(x) + Y(y) = -\cosh(x) + \sinh(y). \quad (124)$$

4.2 Exercise 2

A body of unitary mass is subjected to the potential

$$V(q) = q^2 e^{-q^2}. \quad (125)$$

Write down the dynamical system associated to, study the potential energy and the equilibrium points. Study the energy level curves of the corresponding dynamic system, find a set of initial data such that the trajectory is periodic and estimate the period.

Solution

The dynamical system equations are given by the system

$$\begin{aligned} v &= \dot{q} \\ \dot{v} &= -V'(q) = -2qe^{-q^2} + 2q^3e^{-q^2} = 2e^{-q^2}q(q^2 - 1). \end{aligned} \quad (126)$$

The equilibrium point are in

$$V'(q) = 0 \Rightarrow 2e^{-q^2}q(q^2 - 1) = 0 \Rightarrow q = 0, \quad q = \pm 1; \quad (127)$$

the sign of the first derivative

$$V'(q) > 0 \Rightarrow -2e^{-q^2}q(q^2 - 1) > 0 \quad (128)$$

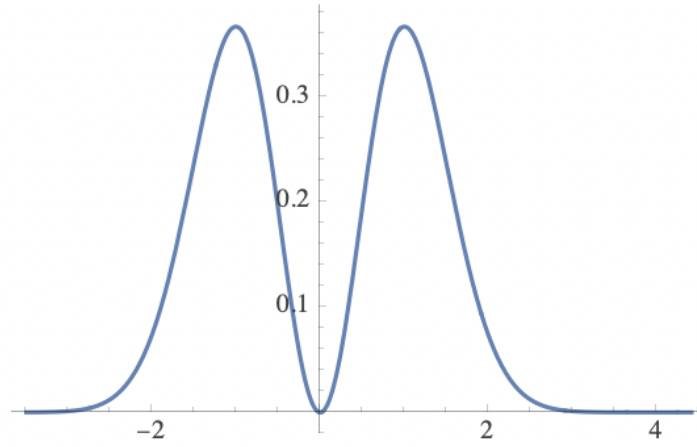
says that the function is increasing in the intervals $I_1 := (-\infty, -1)$ and $I_2 := (0, 1)$ and decreasing in $I_3 := (-1, 0)$ and $I_4 := (1, +\infty)$. Therefore $q = 0$ is a minimum, so it is a stable equilibrium point and $V(0) = 0$ while $q \pm 1$ are maximum points, they are so unstable equilibrium points and $V(\pm 1) = \frac{1}{e}$. Moreover

$$V(q) = 0 \Rightarrow q = 0 \quad (129)$$

and

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(q) = 0^+. \quad (130)$$

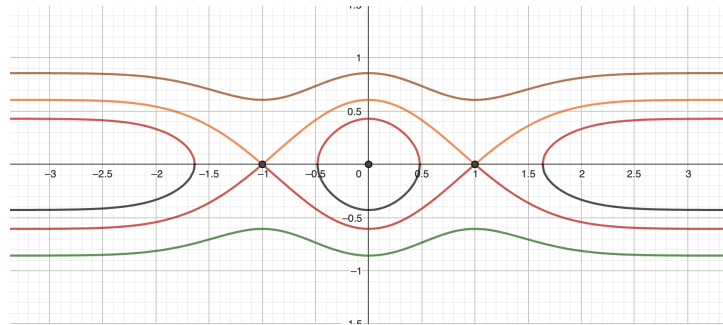
The plot of the potential is



From $E = \frac{v^2}{2} + V(q)$ we have

$$v(q) = \pm\sqrt{2(E - V(q))}. \quad (131)$$

which describe the curves on the phase space. Since the minimum is $V(0) = 0$, the motion is possible only for $E \geq 0$. For $E = V(0) = 0$ we have a fixed position in $(q, v) = (0, 0)$. For $0 < E < \frac{1}{e}$ we have a periodic trajectory around the stable point $q = 0$ and two open trajectories with $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} v(q) = \pm\sqrt{2E}$. For $E = \frac{1}{e}$ we have two fixed positions in $(q, v) = (\pm 1, 0)$ and two open trajectories with $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} v(q) = \pm\sqrt{\frac{2}{e}}$, while for $E > \frac{1}{e}$ and two open trajectories with $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} v(q) = \pm\sqrt{2E}$. The initial data $(q(0), v(0)) = (1, \sqrt{2(E - e^{-1})})$ with $0 < E < \frac{1}{e}$ are such that we remain on a periodic trajectory.



4.3 Exercise 3

A body of unitary mass is subjected to the potential

$$V(q) = \frac{1}{8}(2q(q + 4\sinh(q) + \sinh(2q)) - 8\cosh(q) - \cosh(2q)). \quad (132)$$

Write down the dynamical system associated to, study the potential energy and the equilibrium points. Study the energy level curves of the corresponding dynamic system, find a set of initial data such that the trajectory is periodic and estimate the period.

Solution

Since we have

$$\begin{aligned} V'(q) &= \frac{1}{8}[4q + 8\sinh(q) + 8q\cosh(q) + 2\sinh(2q) + 4q\cosh(2q) - 8\sinh(q) - 2\sinh(2q)] = \\ &= q\left[\frac{1}{2} + \cosh(q) + \frac{1}{2}\cosh(2q)\right] = q[\cosh^2(q) + \cosh(q)] \end{aligned} \quad (133)$$

where we used $\cosh(2q) = 2\cosh^2(q) - 1$; the dynamical system equations are given by the system

$$\begin{aligned} v &= \dot{q} \\ \dot{v} &= -V'(q) = -q[\cosh^2(q) + \cosh(q)]. \end{aligned} \quad (134)$$

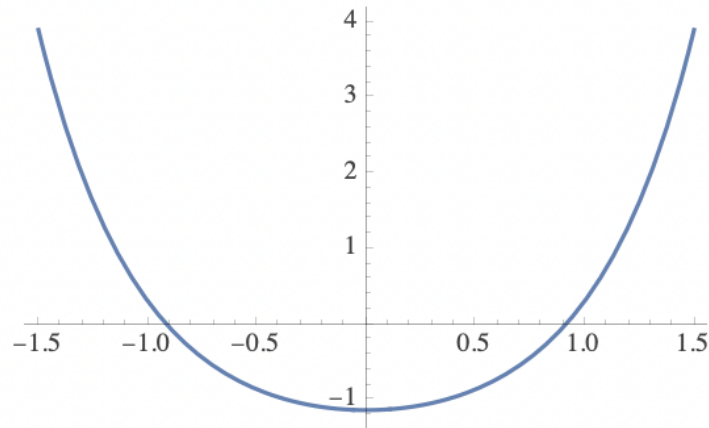
The equilibrium point are in

$$V'(q) = 0 \Rightarrow q[\cosh^2(q) + \cosh(q)] = 0 \Rightarrow q = 0 \quad (135)$$

since $\cosh^2(q) + \cosh(q) = 0$ has no real solutions. The sign of the first derivative tells us that the function is decreasing in $I_1 := (-\infty, 0)$ and increasing in $I_2 := (0, +\infty)$; the point $q = 0$ is a minimum and so a stable equilibrium point. We have $V(0) = -\frac{9}{8}$ and

$$\lim_{q \rightarrow \pm\infty} V(q) = +\infty. \quad (136)$$

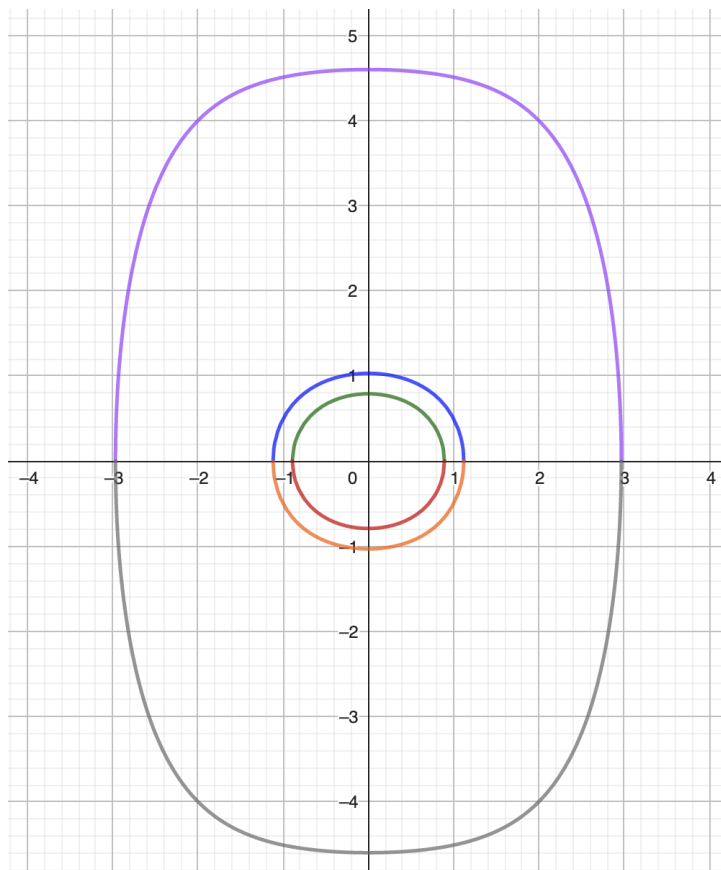
The plot is



From $E = \frac{v^2}{2} + V(q)$ we have

$$v(q) = \pm\sqrt{2(E - V(q))}. \quad (137)$$

which describe the curves on the phase space. Since the minimum is $V(0) = -\frac{9}{8}$, the motion is possible only for $E \geq -\frac{9}{8}$. For $E = -\frac{9}{8}$ we have fixed position in $(0, 0)$; for $E > -\frac{9}{8}$ we have periodic trajectories around the stable point $q = 0$. Any set of data excluding $(0, 0)$ is such that it has periodic trajectories.



4.4 Esercizio 4

Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza di energia potenziale

$$V(x) = -x^3 e^{-x^2}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico che descrive il moto.
2. Determinare una costante del moto.
3. Studiare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
4. Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
5. Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.

Soluzione

1. L'equazione del moto è data da

$$\ddot{x} = -V'(x) = -x^2 e^{-x^2} (-3 + 2x^2).$$

Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^2 e^{-x^2} (-3 + 2x^2) \end{cases}.$$

2. Poiché il sistema è conservativo, una costante del moto è data da

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = \frac{y^2}{2} - x^3 e^{-x^2}.$$

3. Sappiamo che i punti di equilibrio del sistema sono dati da $(x_0, 0)$, dove x_0 sono i punti critici dell'energia potenziale $V(x)$.

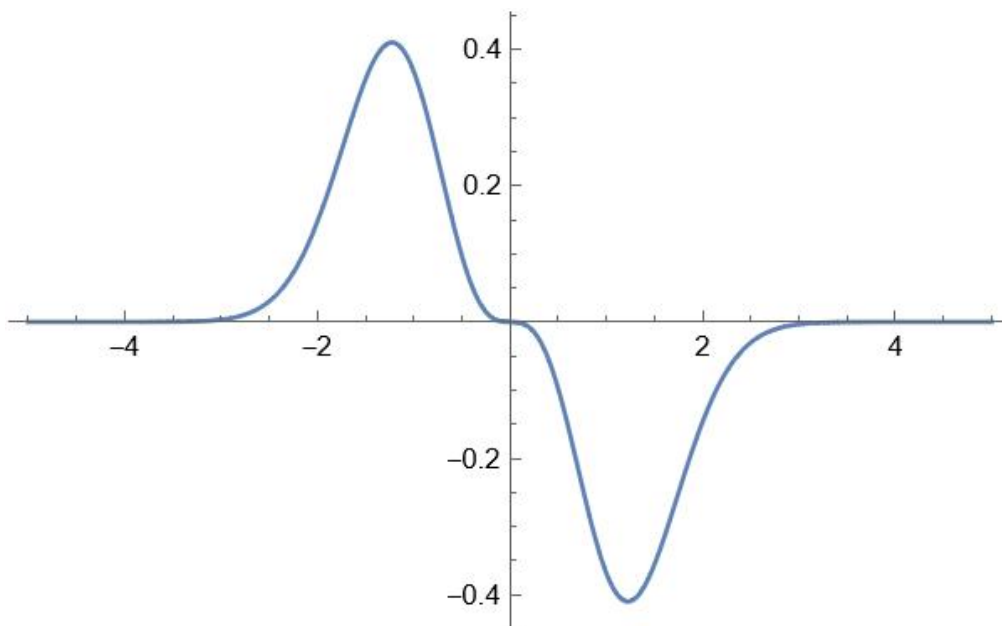
I punti di equilibrio sono, pertanto,

$$P_1 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), \quad P_2 = (0, 0), \quad P_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right).$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti di equilibrio stabili sono tutti e soli quelli della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo dell'energia potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $|x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$, mentre $V'(x) \leq 0$ per $|x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$, pertanto P_3 è stabile mentre P_1 e P_2 sono instabili.

4. Lo studio della derivata prima è stato fatto al punto precedente. L'unica intersezione con gli assi si ha in $(x, y) = (0, 0)$ (in cui c'è un flesso a tangente orizzontale). Inoltre, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0^\mp$.

Un grafico qualitativo dell'energia potenziale $V(x)$ è pertanto dato da



5. Da $E = \frac{y^2}{2} + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò le curve nel piano delle fasi saranno simmetriche rispetto all'asse x . Inoltre, il punto $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è un punto di minimo assoluto per il potenziale, pertanto il moto sarà possibile solo per $E \geq V\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Per $E = V\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ si ha il solo punto di equilibrio stabile P_3 .

Per $V\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) < E < 0$ si ha una traiettoria periodica intorno al punto di equilibrio stabile P_3 .

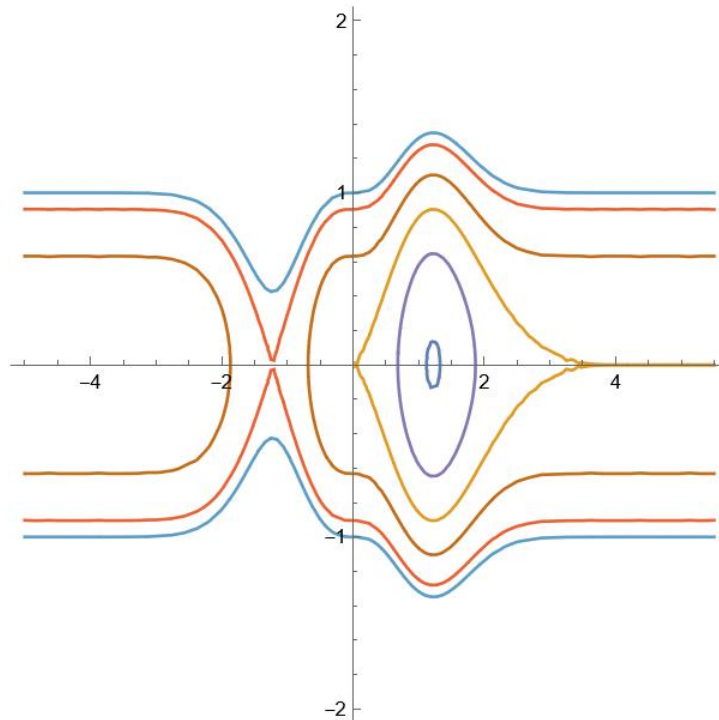
Per $E = 0$ si hanno una traiettoria aperta con $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ (cuspidate) e il punto instabile P_2 .

Per $0 < E < V(-\sqrt{32})$ si hanno due traiettorie aperte, una con $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed una con $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

Per $E = V(-\sqrt{32})$ si hanno due traiettorie aperte con $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, il punto di equilibrio instabile P_1 e due traiettorie aperte con $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

Per $E > V(-\sqrt{32})$ si hanno due traiettorie aperte, una con $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$ ed una con $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$.

Il moto nel piano delle fasi è pertanto dato da



4.5 Esercizio 5

Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza di energia potenziale potenziale

$$V(x) = -\frac{7}{x} + \frac{7}{2x^2}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico che descrive il moto.
2. Determinare una costante del moto.
3. Studiare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
4. Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
5. Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.
6. Se esistono moti periodici, calcolarne il periodo in forma di integrale definito.
7. Se esistono moti illimitati, dire se il tempo per arrivare all'infinito è finito o no e se il moto esiste globalmente.

Soluzione

1. L'equazione del moto è data da

$$\ddot{x} = -V'(x) = \frac{7(x-1)}{x^3}.$$

Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{5(x-1)}{x^3} \end{cases}.$$

2. Poiché il sistema è conservativo, una costante del moto è data da

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = \frac{y^2}{2} - \frac{7}{x} + \frac{7}{2x^2}.$$

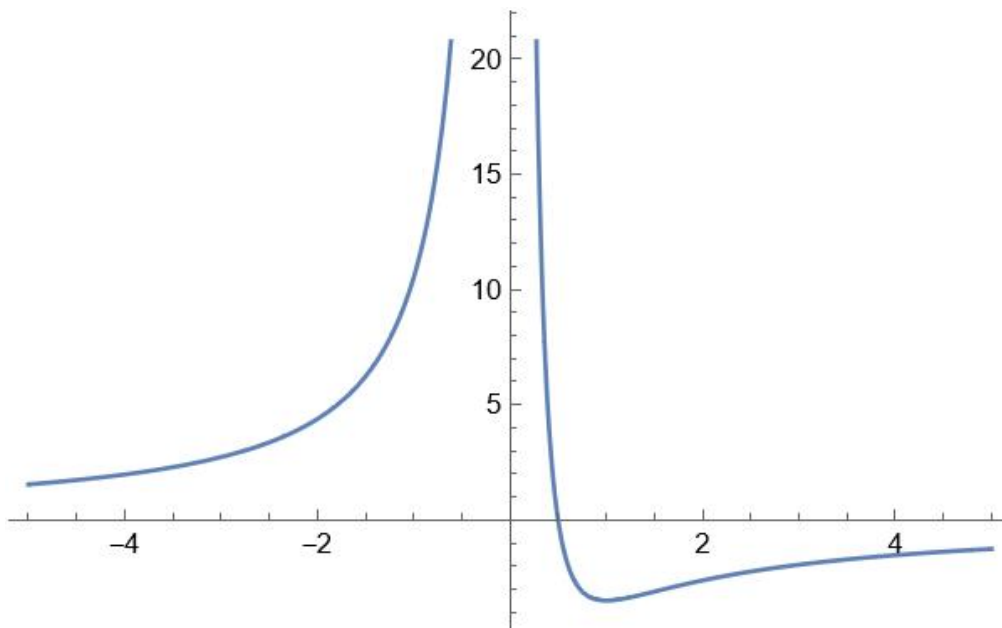
3. Sappiamo che i punti di equilibrio del sistema sono dati da $(x_0, 0)$, dove x_0 sono i punti critici dell'energia potenziale $V(x)$.

L'unico punto di equilibrio è, pertanto, $P = (1, 0)$.

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti di equilibrio stabili sono tutti e soli quelli della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo dell'energia potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > 1$, mentre $V'(x) < 0$ per $0 < x < 1$ (si osservi che $x = 0$ è un asintoto verticale per $V(x)$). Pertanto, il punto di equilibrio P è stabile.

4. Lo studio della derivata prima è stato fatto al punto precedente. L'unica intersezione con gli assi si ha in $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$. Inoltre, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0^\mp$ e $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \mp\infty$.

Un grafico qualitativo dell'energia potenziale $V(x)$ è pertanto dato da



5. Da $E = \frac{y^2}{2} + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò le curve nel piano delle fasi saranno simmetriche rispetto all'asse x . Inoltre, il punto $x = 1$ è un punto di minimo assoluto per il potenziale, pertanto il moto sarà possibile solo per $E \geq V(1)$.

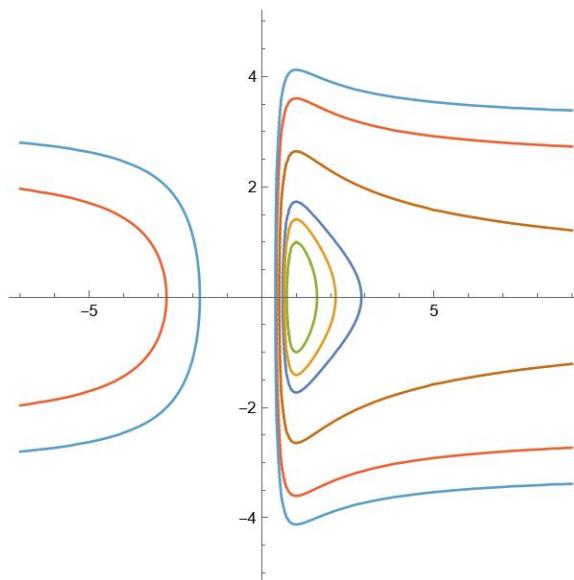
Per $E = V(1)$ si ha il solo punto di equilibrio stabile P .

Per $V(1) < E < 0$ si ha una traiettoria periodica intorno al punto di equilibrio stabile P .

Per $E = 0$ si ha una traiettoria aperta con $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

Per $E > 0$ si hanno due traiettorie aperte, una con $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed una con $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\infty$.

Il moto nel piano delle fasi è pertanto dato da



6. Il periodo del moto è dato da

$$T = \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}$$

per $V(1) < E < 0$, dove x_- e x_+ sono le soluzioni di $E = V(x)$.

7. Fissato un dato iniziale $x(0)$, il tempo per arrivare all'infinito è dato da

$$t_\infty = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2E + \frac{7(2x-1)}{x^2}}}.$$

Si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{2E + \frac{7(2x-1)}{x^2}}} \sim \sqrt{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Pertanto, l'integrale diverge all'infinito, $t_\infty = +\infty$ e il moto esiste globalmente.

5 V: Motion in radial fields and unidimensional systems

5.1 Exercise 1

Given the following radial central field acting on a particle of mass M

1. $F(\mathbf{r}) = -\frac{GM\rho}{(\rho^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathbf{r}}{\rho}$, $\rho = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$;
2. $F(\mathbf{r}) = -\frac{GM\rho}{[b+(b^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}]^2(b^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathbf{r}}{\rho}$, $\rho = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$;

where b is a positive constant, find the effective potential energy

Solution

The effective potential energy is given by

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2M\rho^2} = -\int f(\rho)d\rho + \frac{L^2}{2M\rho^2} \quad (138)$$

where $f(\rho)$ is the function of ρ in front of the factor $\frac{\mathbf{r}}{\rho}$. The circular orbits are the critical values of the effective potential. The velocity of the particle

1

This force modelling is known as Plummer model; it is used in astrophysics to fit the globular cluster observations.

We have

$$V_{eff}(\rho) = GM \int \frac{\rho}{(\rho^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{L^2}{2M\rho^2} = -\frac{GM}{(\rho^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L^2}{2M\rho^2}. \quad (139)$$

2

This force modelling is known as isocrone model; it is used in galactic astrophysics because it turns out to be the only known model that could be generated by a realistic stellar system.

We have

$$V_{eff}(\rho) = GM \int \frac{\rho}{[b + (b^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}]^2(b^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L^2}{2M\rho^2} = -\frac{GM}{b + (\rho^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L^2}{2M\rho^2}. \quad (140)$$

5.2 Exercise 2

A body of mass m is subject to a central force

$$F(\mathbf{r}) = (A\rho - B)\frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \rho = |\mathbf{r}|, \quad A, B > 0. \quad (141)$$

Let L be the component of the angular momentum orthogonal to the plane of motion, we assume it satisfies the relation

$$L^2 < m(-A\bar{\rho}^4 + B\bar{\rho}^3) \quad (142)$$

for a particular value $\bar{\rho} > 0$.

- Show that there are two values ρ_1 and ρ_2 , with $\rho_1 < \rho_2$, which correspond to two circular orbits;
- find the period T of the circular orbit for $L = 2\frac{kgm^2}{s}$, $m = 1kg$, $A = -1\frac{J}{m^2}$ and $B = 0\frac{J}{m}$.

Solution

As know every central field is conservative, the potential energy is given by

$$V(\rho) = - \int f(\rho)d\rho = -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho \quad (143)$$

where $f(\rho) = A\rho - B$; therefore the effective potential energy is

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho + \frac{L^2}{2m\rho^2} \quad (144)$$

where the second term is give rise to the centrifugal force. The circular trajectories are identified by the critical points of the effective potential,

$$V'_{eff}(\rho) = -A\rho + B - \frac{c^2}{2m\rho^3} = \frac{1}{m\rho^3}(-mA\rho^4 + mB\rho^3 - L^2) = 0 \Rightarrow -mA\rho^4 + mB\rho^3 - L^2 = 0. \quad (145)$$

Thanks to the Descartes' rule of signs (if the non-zero terms of a single-variable polynomial with real coefficients are ordered by descending variable exponent, then the number of positive roots of the polynomial is either equal to the number of sign changes between consecutive non-zero coefficients, or is less than it by an even number. A root of multiplicity k is counted as k roots.) we can conclude that, since there are two sign changes, there are zero or two positive roots. Since the polynomial satisfy

$$p(0) = -L^2 < 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty \quad (146)$$

but also that exist a value $\bar{\rho}$ such that

$$p(\bar{\rho}) > 0, \quad (147)$$

we conclude there exist two positive roots ρ_1 and ρ_2 .

From the given data, the first derivative of the effective potential reduces to

$$V'_{eff}(\rho) = \rho^4 - 4 \quad (148)$$

so we have only one circular obit with radius $\rho = \sqrt{2}$; the period is given by

$$T = 2\pi \frac{m\rho^2}{L} = 2\pi \quad (149)$$

this equation derives from integration of the angular equation $\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2}$ (deriving from the fact of orienting the system in which the axis z is oriented along the angular momentum vector) recalling that a critical point ρ_{crit} of the effective potential is an equilibrium point of the radial effective equation $m\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho}$ and the solution is $\rho(t) = \rho_{crit}$.

5.3 Exercise 3

A body of unit mass is subject to a central force

$$F(\mathbf{r}) = -2\left(\frac{\alpha}{\rho^3} + \rho\right)\frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \rho = |\mathbf{r}|, \quad \alpha > 0. \quad (150)$$

- State for which values of α and L (the component of the angular momentum orthogonal to the plane of motion) stable circular trajectories exist in the plane of motion;
- in the case where $\alpha = 1Jm^2$ and $L = 4\frac{kgm^2}{s}$, compute the returning points of the motion of ρ as a function of the value E of the total energy;
- Study the phase portrait in the plane $(\rho, \dot{\rho})$ in function of α and L^2 .

Solution

As know every central field is conservative, the potential energy is given by

$$V(\rho) = - \int f(\rho)d\rho = -\frac{\alpha}{\rho^2} + \rho^2 \quad (151)$$

where $f(\rho) = 2\left(\frac{\alpha}{\rho^3} + \rho\right)$; therefore the effective potential energy is

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2} + \rho^2 + \frac{L^2}{2\rho^2} = \rho^2 + \frac{L^2 - 2\alpha}{2\rho^2} \quad (152)$$

where the second term is give rise to the centrifugal force. The circular trajectories are identified by the critical points of the effective potential,

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{2\alpha - L^2}{\rho^3} + 2\rho = 0 \Rightarrow \rho = \sqrt[4]{\frac{L^2 - 2\alpha}{2}} := \bar{\rho}. \quad (153)$$

Circular orbits exist only if $L^2 - 2\alpha > 0$, moreover if $L^2 - 2\alpha > 0$ we have $V''_{eff}(\bar{\rho}) > 0$; therefore the critical point is a minimum and so the circular orbit with radius $\bar{\rho}$ is a stable orbit.

Indicating with E the constant value of the total energy, the inversion points of the radial motion are defined by the relation

$$E - V_{eff}(\rho) = 0 \Rightarrow E = \rho^2 + \frac{L^2 - 2\alpha}{2\rho^2}; \quad (154)$$

with the give date we get

$$E = \rho^2 + \frac{7}{\rho^2} \Rightarrow \rho^4 - \rho^2 E + 7 = 0. \quad (155)$$

The turning points are than the positive roots

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{E + \sqrt{E^2 + 28}}{2}}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{E - \sqrt{E^2 + 28}}{2}}. \quad (156)$$

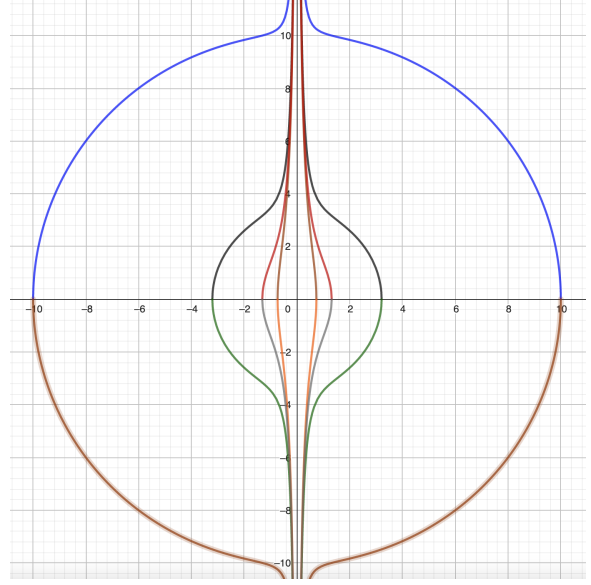
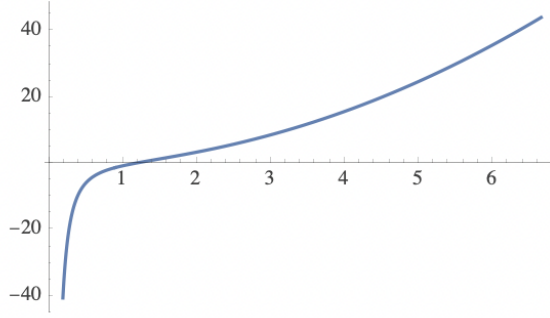
For $2\alpha - L^2 > 0$ we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff} = -\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff} = +\infty \quad (157)$$

and no critical points. From $E = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{eff}(\rho)$ we have

$$\dot{\rho}(\rho) = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}. \quad (158)$$

which describe the curves on the phase space. The energy can take any real value and for all values of energy there are only open orbits. The plot of the effective potential energy and of the phase space for $\alpha = 2Jm^2$ and $L = 1\frac{kgm^2}{s}$ are (recall we are interested only in the I and IV sectors since $\rho \in \mathbb{R}^+$)



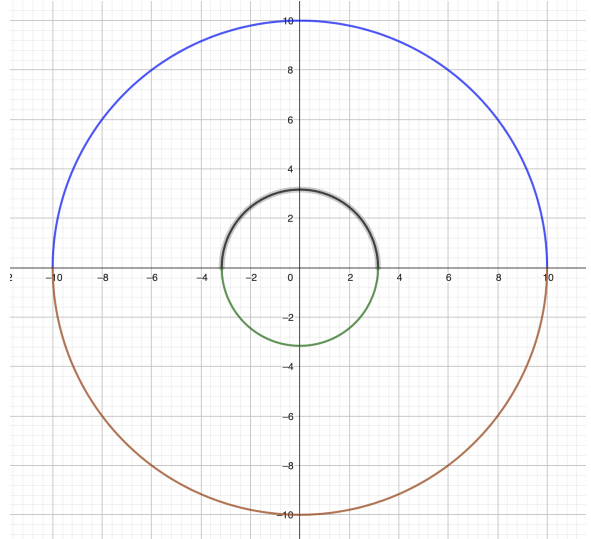
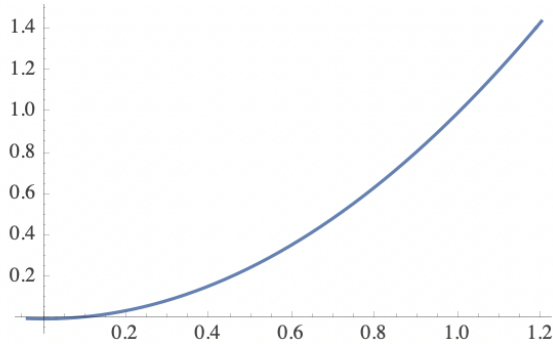
For $2\alpha - L^2 = 0$ we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff} = +\infty \quad (159)$$

and no critical points since $\rho > 0$. From $E = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{eff}(\rho)$ we have

$$\dot{\rho}(\rho) = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}. \quad (160)$$

which describe the curves on the phase space. The energy can take only values strictly greater than zero; for all values of energy there are only closed orbits. The plot of the effective potential energy and of the phase space are (recall we are interested only in the I and IV sectors since $\rho \in \mathbb{R}^+$)



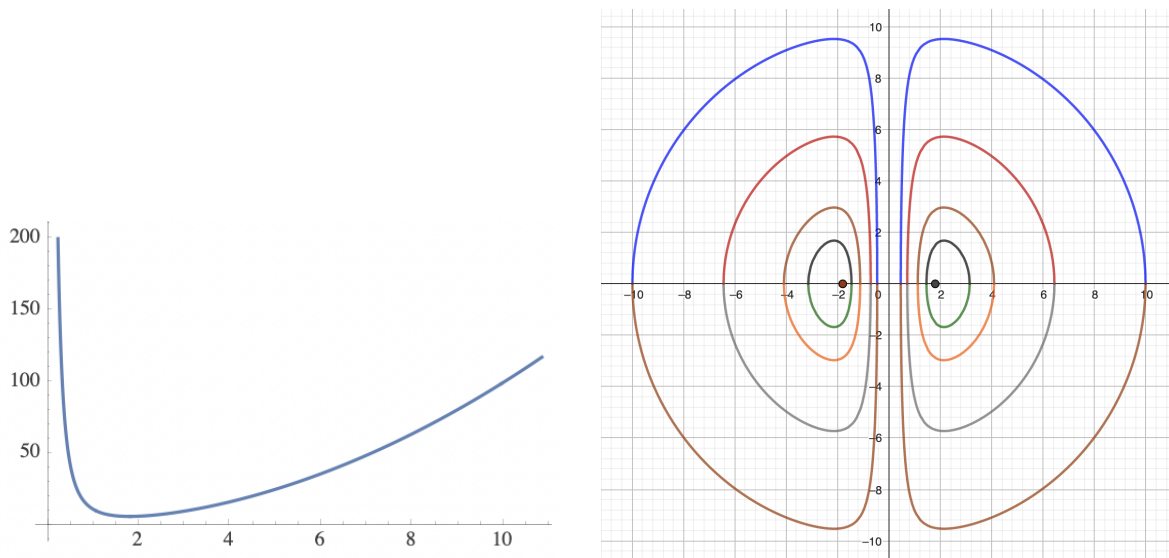
For $2\alpha - L^2 < 0$ we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff} = -\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff} = +\infty \quad (161)$$

and a critical point in $\bar{\rho} = \sqrt[4]{\frac{L^2 - 2\alpha}{2}}$. From $E = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{eff}(\rho)$ we have

$$\dot{\rho}(\rho) = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}. \quad (162)$$

which describe the curves on the phase space. The energy can take only values greater than $V_{eff}(\bar{\rho})$; for all values of energy there are only closed orbits. The plot of the effective potential energy and of the phase space for $\alpha = 2Jm^2$ and $L = 5\frac{kgm^2}{s}$ are (recall we are interested only in the I and IV sectors since $\rho \in \mathbb{R}^+$)



5.4 Esercizio 4

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = x + 2 \sin x.$$

1. Si determini l'energia del sistema e se ne verifichi la conservazione.
2. A partire dal grafico dell'energia potenziale, si determinino eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
3. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi e si discuta la natura del moto al variare dell'energia.

Soluzione

1. Il sistema è conservativo, con energia potenziale $V(x)$ tale che $V'(x) = -x - 2 \sin x$. Pertanto, l'energia meccanica

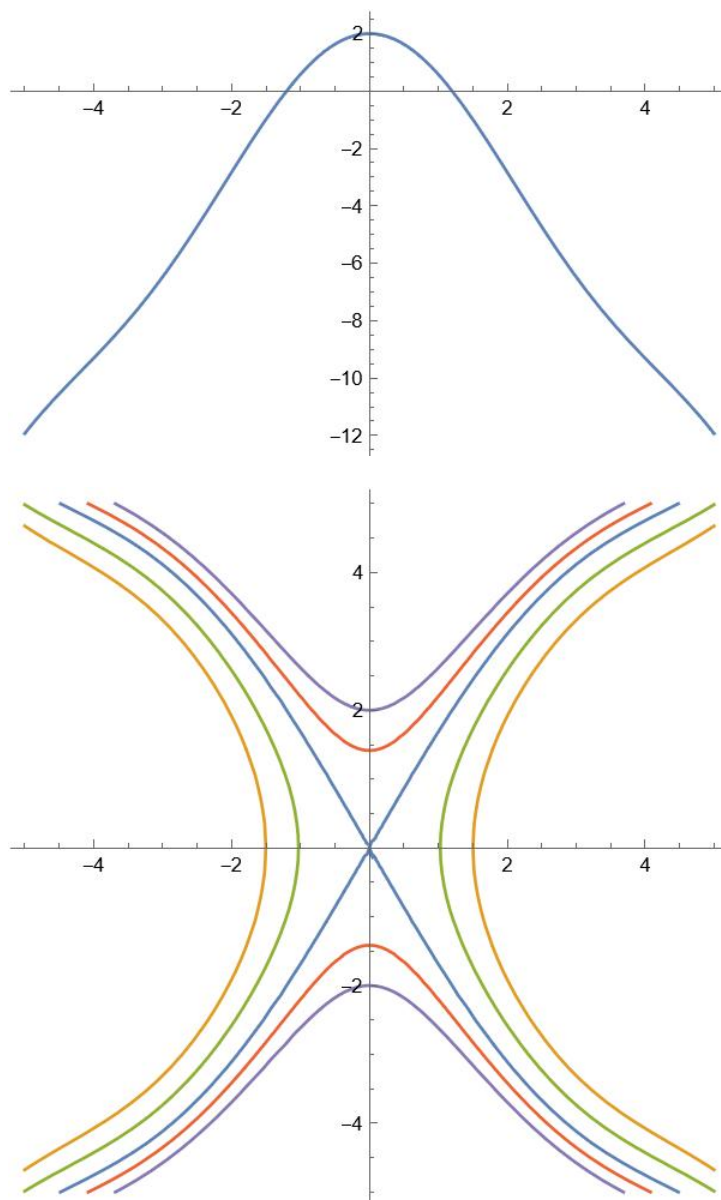
$$E(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 2 \cos x$$

si conserva, come si può vedere derivando rispetto al tempo.

2. Il potenziale è pari ed ha un solo punto critico in $x = 0$. Il sistema ammette, pertanto, un unico punto di equilibrio $P = (0, 0)$, che è instabile in quanto punto di massimo dell'energia potenziale.

Un grafico qualitativo dell'energia potenziale è il seguente:

3. A partire dal grafico dell'energia potenziale si ha che le curve di livello al variare dell'energia E sono quelle riportate di seguito:



Oltre al moto banale $x(t) \equiv 0$, il sistema ammette solamente moti illimitati che tendono a $\pm\infty$ nel futuro o nel passato al variare dei livelli di energia. In particolare:

- Se $E < V(0)$ e $x(0) < 0$, il moto tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro;
- Se $E < V(0)$ e $x(0) > 0$, il moto tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro;
- Se $E = V(0)$ e $x(0) < 0$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a $x = 0$ nel futuro o viceversa;
- Se $E = V(0)$ e $x(0) > 0$, il moto tende a $+\infty$ nel passato e a $x = 0$ nel futuro o viceversa;
- Se $E > V(0)$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a $+\infty$ nel futuro o viceversa.

Si noti che il sistema non ammette moti periodici. Inoltre, tutti i moti del sistema sono globali nel tempo. Il tempo per arrivare all'infinito, infatti, è infinito, poiché $V(x) \sim -\frac{x^2}{2}$ e quindi $\frac{1}{\sqrt{2(E-V(x))}} \sim |x|^{-1}$, che non è integrabile all'infinito.

5.5 Esercizio 5

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = -2(x+2)(2x^2+2x-1).$$

1. Si determini una costante del moto.
2. A partire dal grafico dell'energia potenziale, si determinino eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
3. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi e si discuta la natura del moto al variare dell'energia.
4. Si determinino eventuali orbite periodiche e se ne calcoli il periodo come integrale definito.
5. Si determinino eventuali orbite limitate ma non periodiche.

Soluzione

1. Il sistema è conservativo, con energia potenziale $V(x)$ tale che $V'(x) = 2(x+2)(2x^2+2x-1)$. Pertanto, l'energia meccanica

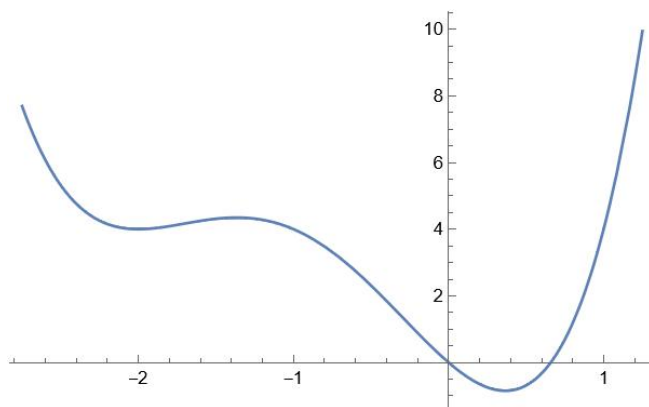
$$E(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x$$

è una costante del moto.

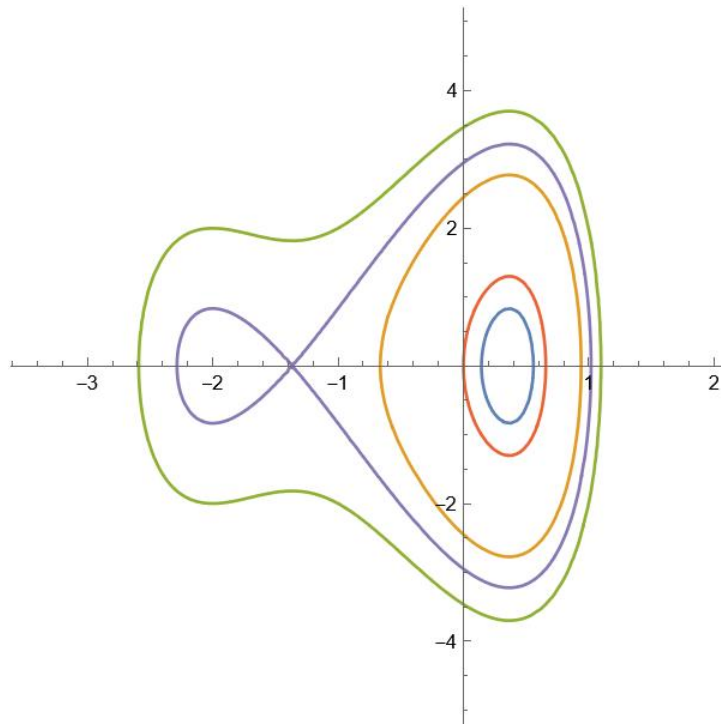
2. I punti critici del potenziale sono $x = -2$, $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, pertanto i punti di equilibrio del sistema sono $P_1 = (-2, 0)$, $P_2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e $P_3 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Inoltre, si ha che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$ e che $V'(x) > 0$ per $-2 < x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e per $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Si ha, pertanto, che P_1 e P_3 sono stabili, in quanto corrispondono a punti di minimo del potenziale, mentre P_2 è instabile, in quanto corrisponde ad un punto di massimo del potenziale.

Infine, notiamo che $V(0) = 0$.

Un grafico qualitativo dell'energia potenziale è il seguente:



3. A partire dal grafico dell'energia potenziale si ha che le curve di livello al variare dell'energia E sono quelle riportate di seguito:



In particolare:

- Per $E = V\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ si ha una sola traiettoria che rimane ferma nel punto P_3 per tutti i tempi;
 - Per $V\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) < E < V(-2)$ ci sono orbite periodiche intorno al punto P_1 ;
 - Per $E = V(-2)$ si hanno una traiettoria che rimane ferma nel punto P_1 ed un'orbita periodica intorno al punto P_3 ;
 - Per $V(-2) < E < V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ ci sono orbite periodiche intorno ai punti P_1 e P_3 ;
 - Per $E = V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ ci sono una traiettoria che rimane ferma nel punto P_2 e due traiettorie che partono dal punto P_2 , una verso destra e una verso sinistra, e ritornano nel punto P_2 in tempi infiniti, girando intorno ai punti di equilibrio stabili;
 - Per $E > V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ ci sono orbite periodiche che girano intorno ai punti di equilibrio.
4. Per tutte le orbite che si ottengono da valori $E \neq V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$, si ha che il periodo è dato da

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - (x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x))}}$$

dove x_- e x_+ sono le soluzioni di $E = V(x)$.

5. Per $E = V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ si hanno orbite limitate ma non periodiche, ad eccezione di quella che rimane ferma nel punto instabile per tutti i tempi.

6 VI: Relative and central motions

6.1 Exercise 1

Let $Oxyz$ the absolute frame and $O'\chi v\zeta$ the relative one. Given the rigid transformation

$$D_t : O'\chi v\zeta \rightarrow Oxyz \quad (163)$$

such that

$$\begin{aligned} x &= \cos(2\alpha(t))\cos(\beta(t))\chi - \cos(2\alpha(t))\sin(\beta(t))v + \sin(2\alpha(t))\zeta + t; \\ y &= \sin(\beta(t))\chi + \cos(\beta(t))v + 2t; \\ z &= -\sin(2\alpha(t))\cos(\beta(t))\chi + \sin(2\alpha(t))\sin(\beta(t))v + \cos(2\alpha(t))\zeta + 3t; \end{aligned} \quad (164)$$

find the translational and the rotational part of the rigid transformation and show that the rotational part belongs to $SO(3)$. Given a body in the frame $O'\chi v\zeta$ that moves with the law $\mathbf{Q}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, find the law in the frame $Oxyz$ and compute the drag velocity and the inertial forces acting on the body in the case $\alpha(t) = 0$.

Solution

We know that every rigid transformation from a relative to an absolute frame can be decomposed in a unique way, due to Mozzi theorem, in a rotation R_t belonging to $SO(3)$ and a translation C_t . Moreover, Let us use the notation $\mathbf{q}(t)$ and $\mathbf{Q}(t)$ for the vectors identifying the point P , respectively, in the absolute frame and in the relative one; so that $\mathbf{q}(t) = D_t\mathbf{Q}(t) = R_t\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t)$. The absolute velocity is

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (165)$$

while the relative one is

$$\mathbf{v}' = R_t\dot{\mathbf{Q}}(t) \quad (166)$$

and we have

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_0 \quad (167)$$

where

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}_T = \dot{R}_t\mathbf{Q}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t)). \quad (168)$$

are the translational velocity and the rotational one, respectively. If in the absolute frame the Newton equations are

$$m\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f} \quad (169)$$

than in the relative frame (moving of rototranslational motion with respect to the absolute frame) the Newton equation reads

$$m\ddot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_0 \quad (170)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= R_t^{-1}\mathbf{f}; \\ \mathbf{F}_T &= -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{Q}; \\ \mathbf{F}_C &= -2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{Q}}; \\ \mathbf{F}_c &= -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}); \\ \mathbf{F}_0 &= -mR_t^{-1}\ddot{\mathbf{r}}; \end{aligned} \quad (171)$$

with

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = R_t^{-1} \boldsymbol{\omega}(t) \quad (172)$$

The rigid transformation D_t can be decomposed as

$$D_t = C_t \circ R_t \quad (173)$$

where

$$C_t = (t, 2t, 3t), \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha(t))\cos(\beta(t)) & -\cos(2\alpha(t))\sin(\beta(t)) & \sin(2\alpha(t)) \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ -\sin(2\alpha(t))\cos(\beta(t)) & \sin(2\alpha(t))\sin(\beta(t)) & \cos(2\alpha(t)) \end{pmatrix}. \quad (174)$$

The matrix R_t can be written as

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha(t)) & 0 & \sin(2\alpha(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(2\alpha(t)) & 0 & \cos(2\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta(t)) & -\sin(\beta(t)) & 0 \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_t^{(v)} R_t^{(\zeta)}; \quad (175)$$

we note that $R_t^{(v)}$ is a rotation matrix around the v axis with angle $2\alpha(t)$ while $R_t^{(\zeta)}$ is a rotation matrix around the ζ axis with angle $\beta(t)$. We know that

$$\mathbf{q}(t) = D_t \mathbf{Q}(t) \quad (176)$$

therefore we have the law in the absolute frame

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha(t))\cos(\beta(t)) & -\cos(2\alpha(t))\sin(\beta(t)) & \sin(2\alpha(t)) \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ -\sin(2\alpha(t))\cos(\beta(t)) & \sin(2\alpha(t))\sin(\beta(t)) & \cos(2\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}. \quad (177)$$

The relative frame moves of rototranslational motion with respect to the absolute frame and D_t reduces to

$$D_t = C_t \circ R_t \quad (178)$$

where

$$C_t = (t, 2t, 3t), \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos(\beta(t)) & -\sin(\beta(t)) & 0 \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (179)$$

The drag velocity is

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T \quad (180)$$

with

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (181)$$

and

$$\mathbf{v}_T = \begin{pmatrix} -\sin(\beta(t))\dot{\beta}(t) & -\cos(\beta(t))\dot{\beta}(t) & 0 \\ \cos(\beta(t))\dot{\beta}(t) & -\sin(\beta(t))\dot{\beta}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}(t)[- \cos(t)\sin(\beta(t)) - \sin(t)\cos(\beta(t))] \\ \dot{\beta}(t)[\cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t))] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (182)$$

We can also compute the rotational drag velocity using $\mathbf{q}(t)$, this is useful to know who is the angular velocity $\boldsymbol{\omega}(t)$; we have

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta(t)) & -\sin(\beta(t)) & 0 \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t)) + t \\ \cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t)) + 2t \\ t + 3t \end{pmatrix}, \quad (183)$$

so

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t)) \\ \cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t)) \\ t \end{pmatrix}, \quad (184)$$

and given a generic vector $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ we have

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_T &= \left| \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ \cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t)) & \cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t)) & t \end{pmatrix} \right| = \\ &= \begin{pmatrix} \omega_2(t)t - \omega_3(t)[\cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t))] \\ -\omega_1(t)t + \omega_3(t)[\cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t))] \\ \omega_1(t)[\cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t))] - \omega_2(t)[\cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t))] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (185)$$

but we have to have

$$\mathbf{v}_T = \begin{pmatrix} \dot{\beta}(t)[-\cos(t)\sin(\beta(t)) - \sin(t)\cos(\beta(t))] \\ \dot{\beta}(t)[\cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t))] \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix}. \quad (186)$$

To compute the inertial forces we need the angular velocity in the relative frame

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta(t)) & \sin(\beta(t)) & 0 \\ -\sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} \quad (187)$$

The inertial forces are so given by

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{Q} = m(\dot{\beta}(t)\sin(t), -\dot{\beta}(t)\cos(t), 0); \\ \mathbf{F}_C &= -2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{Q}} = 2m(\beta(t)\cos(t), \beta(t)\sin(t), 0); \\ \mathbf{F}_c &= -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}) = m(\beta^2(t)\sin(t), \beta^2(t)\cos(t)); \\ \mathbf{F}_0 &= mR^{-1}\ddot{\mathbf{r}} = (0, 0, 0); \end{aligned} \quad (188)$$

6.2 Exercise 2

In a vertical plane, fix a reference frame Oxy with vertical ascending axis Oy . In this plane, consider another frame $O\chi v$, which rotates around the origin with constant angular velocity. In the same plane a rod AC of mass m and length $2l$ can move, with the end point A hinged at the origin O . The force of gravity also acts on the system. Using as coordinate the angle θ that the rod forms with the direction of Ov find the resultant of the forces acting on the rod in the reference $O\chi v$.

Solution

We know that every rigid transformation from an absolute to a relative frame can be decomposed in a unique way, due to Mozzi theorem, in a rotation R_t belonging to $SO(3)$ and a translation C_t . Moreover, Let us use the notation $\mathbf{q}(t)$ and $\mathbf{Q}(t)$ for the vectors identifying the point P , respectively, in the absolute frame and in the relative one; so that $\mathbf{q}(t) = D_t \mathbf{Q}(t) = R_t \mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t)$. The absolute velocity is

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (189)$$

while the relative one is

$$\mathbf{v}' = R_t \dot{\mathbf{Q}}(t) \quad (190)$$

and we have

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_0 \quad (191)$$

where

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}_T = \dot{R}_t \mathbf{Q}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t)). \quad (192)$$

are the translational velocity and the rotational one, respectively. If in the absolute frame the Newton equations are

$$m\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f} \quad (193)$$

than in the relative frame (moving of rototranslational motion with respect to the absolute frame) the Newton equation reads

$$m\ddot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_0 \quad (194)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= R_t^{-1} \mathbf{f}; \\ \mathbf{F}_T &= -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{Q}; \\ \mathbf{F}_C &= -2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{Q}}; \\ \mathbf{F}_c &= -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}); \\ \mathbf{F}_0 &= -mR_t^{-1} \ddot{\mathbf{r}}; \end{aligned} \quad (195)$$

with

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = R_t^{-1} \boldsymbol{\omega}(t) \quad (196)$$

Let \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 the versors of Ox and Oy while \mathbf{e}'_1 and \mathbf{e}'_2 the versors of $O\chi$ and Ov . Since the relative frame is rotating with respect to the absolute one around the third axis we have

$$D_t = R_t = \begin{pmatrix} \cos(\gamma(t)) & -\sin(\gamma(t)) & 0 \\ \sin(\gamma(t)) & \cos(\gamma(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (197)$$

so $\mathbf{e}_2 = \sin(\gamma(t))\mathbf{e}'_1 + \cos(\gamma(t))\mathbf{e}'_2$. The weight force in the frame Oxy is given by $\mathbf{F}_w^{(Oxy)} = -mg\mathbf{e}_2$ so in the frame $O\chi v$ we have

$$\mathbf{F}_w^{(O\chi v)} = -mg[\sin(\gamma(t))\mathbf{e}'_1 + \cos(\gamma(t))\mathbf{e}'_2]. \quad (198)$$

The vector describing the motion of a single point of the road is given by

$$\mathbf{Q}(t) = r\mathbf{e}_C \quad (199)$$

where $\mathbf{e}_C = \sin(\theta)\mathbf{e}'_1 - \cos(\theta)\mathbf{e}'_2$ is the versor of the road. Moreover the angular velocity is simply given by

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}(t) \end{pmatrix} \quad (200)$$

since the frames are rotating around the third axis. The problem say that the angular velocity is constant therefore, since we know taht

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\Omega}}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = 0; \quad (201)$$

moreover the third axes of the two frame are parallel so

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{e}_3 \quad (202)$$

The inertial forces acting on every point of the road are only the centrifugal one and the Coriolis one:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2\lambda\omega \mathbf{e}_3 \times (r\dot{\mathbf{e}}_C) = 2\lambda\omega \mathbf{e}_3 \times r\dot{\theta}[\cos(\theta)\mathbf{e}'_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}'_2] = 2\lambda\omega r\dot{\theta}\mathbf{e}_C; \\ \mathbf{F}_c &= -\lambda\omega \mathbf{e}_3 \times (\omega \mathbf{e}_3 \times r\mathbf{e}_C) = \lambda\omega^2 r\mathbf{e}_C; \end{aligned} \quad (203)$$

where $\lambda = \frac{m}{2l}$ is the mass per unit length of the road. To conclude the exercise we need to understand that the road is nothing but a collection of point on each of which inertial forces act; so the total centrifugal and Coriolis forces acting on the road are

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C^{(tot)} &= \int_0^{2l} \mathbf{F}_C dr = 2m\omega\dot{\theta}l\mathbf{e}_C; \\ \mathbf{F}_c^{(tot)} &= \int_0^{2l} \mathbf{F}_c dr = m\omega^2 l\mathbf{e}_C. \end{aligned} \quad (204)$$

The resultant of the forces acting on the road in the $O\chi v$ frame is than

$$\mathbf{F}^{(res)} = \mathbf{F}_C^{(tot)} + \mathbf{F}_c^{(tot)} + \mathbf{F}_w^{(O\chi v)} = m[(2\omega\dot{\theta}l + \omega^2 l)\sin(\theta) - g\sin(\gamma(t))]\mathbf{e}'_1 - m[(2\omega\dot{\theta}l + \omega^2 l)\cos(\theta) + g\cos(\gamma(t))]\mathbf{e}'_2 \quad (205)$$

where $\gamma(t) = \omega t$.

6.3 Esercizio 3

Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico tridimensionale ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$) costituito da due particelle di massa m dato da

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = -2\alpha(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -2\alpha(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \end{cases}$$

con $m, \alpha > 0$, cioè:

1. Si decomponga il moto complessivo in moto del centro di massa più moto nella coordinata relativa e si studi qualitativamente il moto nella coordinata relativa.
2. Si trovino le costanti del moto del moto relativo.

3. Si disegni il grafico del potenziale efficace al variare del momento angolare, si disegnino le orbite nel piano della fasi $(\rho, \dot{\rho})$ e si discutano le proprietà qualitative risultanti del moto radiale e del moto complessivo. In particolare:
- (i) Per $L = 0$ si dica per quali valori dell'energia il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico.
 - (ii) Per $0 < L^2 < \frac{m\alpha}{12}$ si trovino le condizioni sotto cui il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico.
 - (iii) Per $L^2 = \frac{m\alpha}{12}$ si trovi un moto complessivo periodico nella coordinata relativa.
 - (iv) Per $L^2 > \frac{m\alpha}{12}$ si dimostri che tutte le orbite sono aperte.

Soluzione

Il sistema è costituito da due punti materiali di massa $m_1 = m_2 = m$ che interagiscono attraverso una forza centrale (i.e. tale che soddisfi il terzo principio della dinamica, dipenda solo dal modulo della differenza dei vettori posizione dei due punti, sia diretta lungo la retta congiungente i due punti). Le equazioni del moto sono dunque descritte dal seguente sistema:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \end{cases}$$

dove $F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -2\alpha|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4)$.

Sotto queste ipotesi, se introduciamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

dove \mathbf{R} è la coordinata del centro di massa e \mathbf{r} è la coordinata relativa, abbiamo che, nelle nuove variabili, le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}} = 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|) \end{cases}$$

dove $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ è la massa ridotta.

La prima equazione è l'equazione del moto del centro di massa, che risulta essere rettilineo uniforme.

Ci concentreremo sullo studio della seconda equazione.

Sappiamo che le forze centrali sono conservative, pertanto esiste una funzione V tale che

$$F(\mathbf{r}) = -V'(\mathbf{r}).$$

Nel nostro caso, $F(\mathbf{r}) = -2\alpha r(1 - 3r^4)$, pertanto $V(\mathbf{r}) = \alpha r^2 - \alpha r^6$. Dalla teoria sappiamo che se il momento angolare $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ il moto si svolge su un piano ortogonale a \mathbf{L} . Scegliamo quindi un sistema di coordinate in cui l'asse z è diretto lungo la direzione del vettore momento angolare, in modo tale da poter scrivere $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$, così da ridurre il sistema ad un'equazione a due gradi di libertà.

Introduciamo quindi un nuovo cambiamento di variabili

$$\begin{cases} r_1 = \rho \cos \theta \\ r_2 = \rho \sin \theta \end{cases}$$

in modo tale che nelle coordinate polari (ρ, θ) il sistema si possa scrivere come

$$\begin{cases} \mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} \\ \dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2} \end{cases} .$$

Per la conservazione del momento angolare, la seconda equazione si può risolvere facilmente se si conosce $\rho(t)$.

La prima equazione, invece, può essere considerata come l'equazione di un punto materiale di massa μ che si muove sulla semiretta \mathbb{R}_+ . Lo studio è quindi equivalente a quello di un moto unidimensionale con energia potenziale $V_{eff}(\rho)$ data dalla somma tra energia potenziale originaria $V(\rho)$ ed energia potenziale centrifuga $\frac{L^2}{2\mu\rho^2}$. Dobbiamo studiare, pertanto, l'equazione

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho}$$

dove $V_{eff}(\rho) = \alpha\rho^2 - \alpha\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$ al variare di $\alpha, \mu > 0$ e $L \geq 0$.

Le costanti del moto sono l'energia totale del sistema e il momento angolare.

Dobbiamo ora distinguere il caso $L = 0$ da quello $L > 0$.

- $L = 0$: In questo caso il moto avviene su una retta e perciò dobbiamo studiare

$$V_{eff}(x) = \alpha x^2 - \alpha x^6$$

per $x \in \mathbb{R}$.

Si ha che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_{eff}(x) = -\infty$ e che $V'_{eff}(x) > 0$ per $x < -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ e $0 < x < \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Quindi $x_1 = 0$ è un punto di minimo per il potenziale e dunque punto di equilibrio stabile per il sistema, $x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ e $x_3 = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ sono punti di massimo per il potenziale e dunque punti di equilibrio instabile per il sistema.

Si hanno traiettorie periodiche in corrispondenza dei punti di equilibrio e per valori di energia $V_{eff}(0) < E < V_{eff}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$.

- $L > 0$: Si ha che $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty$ e che $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty$.

Inoltre,

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{2\mu\alpha\rho^4 - 6\mu\alpha\rho^8 - L^2}{\mu\rho^3}.$$

Pertanto, con la sostituzione $t = \rho^4$ otteniamo che $V'_{eff}(\rho) = 0$ per

$$-6\mu\alpha t^2 + 2\mu\alpha t - L^2 = 0,$$

che ha come radici

$$t_{1,2} = \frac{\mu\alpha \pm \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}.$$

Quindi il potenziale avrà 0, 1, 2 punti critici a seconda che $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2$ sia maggiore, minore o uguale a 0.

(a) $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2 > 0 \Rightarrow L^2 < \frac{\mu\alpha}{6}$: La derivata si annulla in 4 punti:

$$\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{\mu\alpha + \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}}, \quad \rho_2 = -\sqrt[4]{\frac{\mu\alpha + \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}},$$

$$\rho_3 = \sqrt[4]{\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}}, \quad \rho_4 = -\sqrt[4]{\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}}.$$

Ovviamente, ρ_2 e ρ_4 devono essere scartati in quanto negativi mentre ρ_1 è ben definito. Per quanto riguarda ρ_3 , dobbiamo verificare se la quantità sotto radice quarta sia positiva:

$$\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}$$

e, poiché $\sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2} < \mu\alpha$, si ha che

$$\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha} > 0.$$

Come si può vedere dallo studio del segno di $V'_{eff}(\rho)$, si ha che ρ_1 è un punto di massimo per il potenziale e dunque punto di equilibrio instabile per il sistema, mentre ρ_3 è un punto di minimo per il potenziale e dunque punto di equilibrio stabile per il sistema.

(b) $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2 = 0 \Rightarrow L^2 = \frac{\mu\alpha}{6}$: La derivata si annulla nel solo punto $\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.

Per studiare la natura del punto critico, notiamo che

$$V''_{eff}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{6}}\right) = 0$$

e pertanto il punto ρ_1 è un flesso a tangente orizzontale e dunque punto di equilibrio instabile per il sistema.

(c) $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2 < 0 \Rightarrow L^2 > \frac{\mu\alpha}{6}$: La derivata del potenziale non si annulla in nessun punto.

Pertanto, nell'ultimo caso si ha che tutte le orbite sono aperte, mentre nei casi precedenti il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico in corrispondenza dei punti di equilibrio per la variabile radiale, oppure quando il moto per la variabile radiale è periodico e la variazione della variabile angolare è commensurabile con 2π , cioè se esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $\int_0^T \frac{L}{\rho^2(t)} dt = 2\pi q$, dove T indica il periodo della variabile radiale.

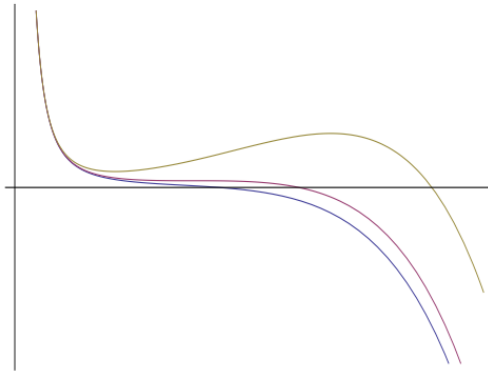


Figure 1: *Potenziale efficace al variare di $L > 0$, per $L < \frac{\mu\alpha}{6}$ (blu), $L = \frac{\mu\alpha}{6}$ (viola), $L > \frac{\mu\alpha}{6}$ (giallo).*

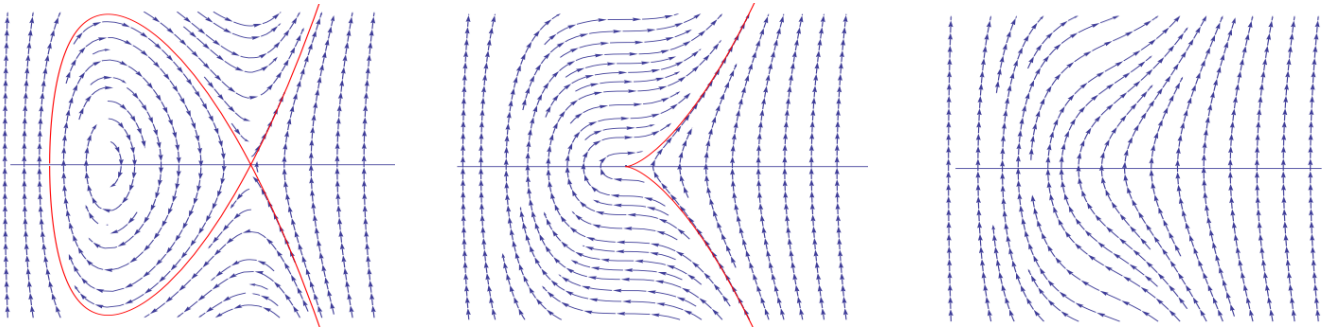


Figure 2: *Orbite nei casi (a), (b), (c).*

6.4 Esercizio 4

Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log\left(\frac{3\rho^2 + 2}{2\rho}\right).$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Studiare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

Soluzione

1. Sapendo che

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} = \log\left(\frac{3\rho^2 + 2}{2\rho^2}\right),$$

le equazioni di Newton sono

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} = -\frac{6\rho^4 - 2\rho^2(2 + 3L^2) - 4L^2}{2\rho^3(3\rho + 2)}$$

e dunque, ponendo $\dot{\rho} = y$, si ha che il sistema dinamico associato è dato da

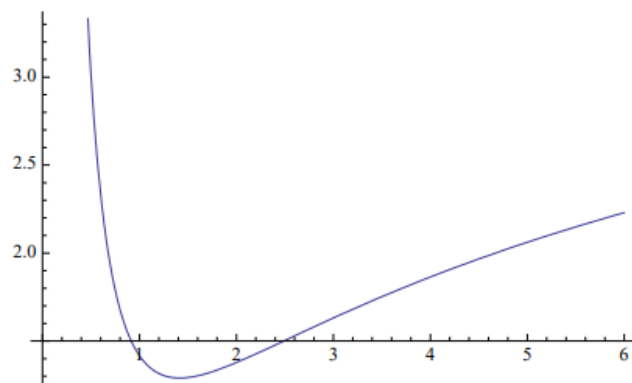
$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{6\rho^4 - 2\rho^2(2 + 3L^2) - 4L^2}{2\rho^3(3\rho + 2)} \end{cases} .$$

2. I punti di equilibrio sono della forma $(\rho_0, 0)$, dove ρ_0 è un punto critico di V_{eff} . Calcolando $V'_{eff}(\rho)$ e ricordando che ρ è positivo (in quanto raggio), si ha che

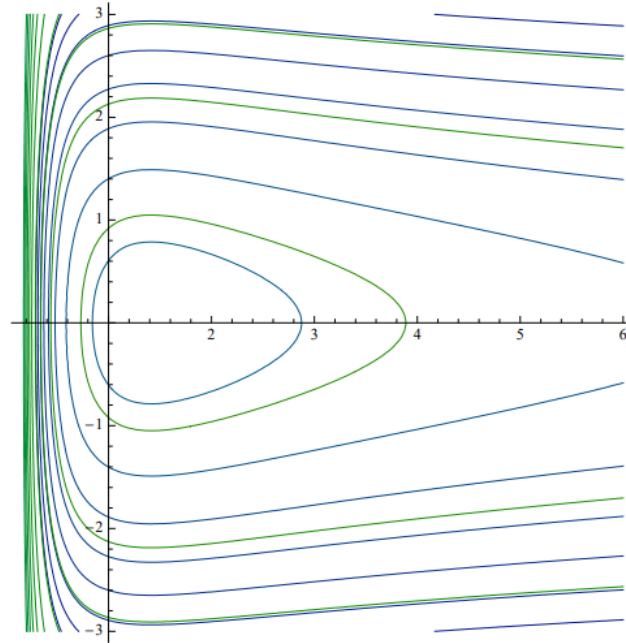
$$\rho_0 = \sqrt{\frac{(2 + 3L^2) + \sqrt{(2 + 3L^2)^2 + 24L^2}}{6}}$$

è un punto di minimo per $V_{eff}(\rho)$. Perciò, dal teorema di Dirichlet si ha che $(\rho_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema.

3. Dai calcoli svolti al punto precedente e notando che $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$ si ha che il grafico di $V_{eff}(\rho)$ è il seguente:



4. A partire dal grafico di V_{eff} , si ha che per $E = V_{eff}(\rho_0)$ c'è il solo punto di equilibrio e per $E > V_{eff}(\rho_0)$ ci sono traiettorie periodiche attorno al punto stabile. Il moto nel piano delle fasi è dato pertanto da:



5. Dal punto precedente segue che per $\rho > 0$ e per valori di energia $E > V_{eff}(\rho_0)$ si hanno traiettorie periodiche.

7 VII: Revision exercises for mid-term test

7.1 Exercise 1

Given the following dynamical system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x[2y + 6] + y; \\ \dot{y} &= yx + 3x^2y. \end{aligned} \tag{206}$$

say if it is a conservative system and find a conserved quantity. Find the equilibrium point of the system. Focus on the linearized system at the stable equilibrium point such that $|x_{eq} + y_{eq}| < \frac{1}{2}$; solve that system for a generic initial condition. Let us now turn on a perturbation of the system given by the force field $F(t) = (\sin(6t), \cos(6t))$, find the solution for the initial condition $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Solution

We have the field

$$F_1(x, y) = -x(2y + 6) + y, \quad F_2(x, y) = yx + 3x^2y; \tag{207}$$

to show if the the system is conservative we need to find a scalar function such that

$$F_1(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, \quad F_2(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}. \tag{208}$$

We have, from the first equation

$$V(x, y) = -\frac{y^2}{2}x - \frac{3y^2x}{2} + f(x), \quad (209)$$

inserting in the second one

$$-\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = -\frac{y^2}{2} - \frac{3y^2}{3} + f'(x) = yx + 3x^2y; \quad (210)$$

since the function $f(x)$ must be only x -dependent, we conclude that there is no a scalar function playing the role of potential. The equilibrium points are given by

$$-x(2y + 6) + y = 0, \quad yx + 3x^2y = 0; \quad (211)$$

the solutions are $p_0 = (0, 0)$ and $p_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{6}{5})$. To study the stability of these points, let us linearize the system; the jacobian matrix is

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2y - 6 & 1 - 2x \\ y + 6xy & x + 3x^2 \end{pmatrix}. \quad (212)$$

In p_0 we have

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -6, \quad (213)$$

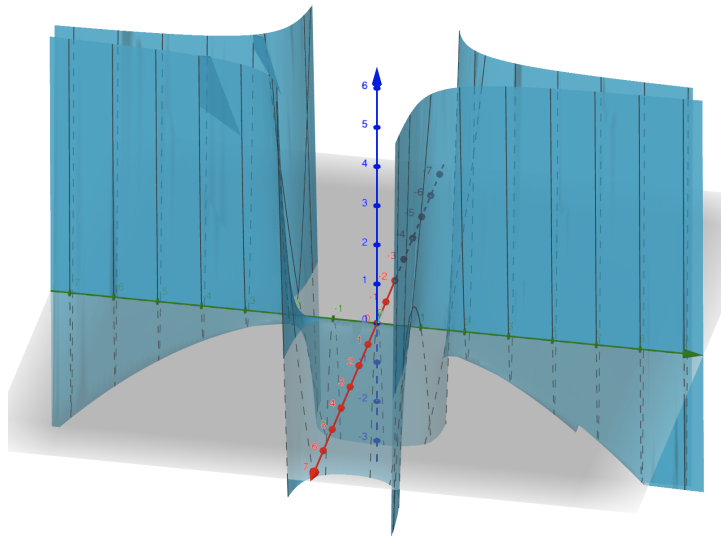
so we cannot conclude anything and we need to find a Ljapunov function; let us prove with

$$L(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (214)$$

we find

$$\dot{L}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = x[-x(2y + 6) + y] + y[yx + 3x^2y] = -2x^2y + 6x^2 + xy + xy^2 + 3x^2y^2. \quad (215)$$

We note that $\dot{L}(x, y)$ is vanishing along the y -axis and, thanks to the term, $-6x^2$ around the origin, and excluding the y -axis, the function is negative. The point p_0 is stable and the plot of $\dot{L}(x, y)$ is reported below.



In p_1 we have

$$J\left(-\frac{1}{3}, -\frac{6}{5}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} & \frac{5}{3} \\ \frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{131}}{5} \quad (216)$$

and since $\frac{-9+\sqrt{131}}{5} > 0$ this is an unstable equilibrium point.

The solution of the linearized system around p_0

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (217)$$

is given by the matrix exponential

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{J(0,0)t}. \quad (218)$$

To compute the matrix exponential $e^{J(0,0)t}$ we use Caley-Hamilton theorem, we have

$$1 = f_0, \quad e^{-6t} = f_0 - 6f_1t, \quad (219)$$

the solution is $f_0 = 1$ and $f_1 = \frac{1-e^{-6t}}{6t}$. The solution is

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \left\{ 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1-e^{-6t}}{6t} \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-6t} - 1 & \frac{1-e^{-6t}}{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-6t} & \frac{1-e^{-6t}}{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_0 e^{-6t} + y_0 \left(\frac{1-e^{-6t}}{6} \right) \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (220)$$

when we turn on the perturbation, the system becomes inhomogeneous

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(5t) \\ \cos(5t) \end{pmatrix} \quad (221)$$

so the solution is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{J(0,0)t} + e^{J(0,0)t} \int_0^t e^{-J(0,0)s} F(s) ds. \quad (222)$$

We need to compute only the integral

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-J(0,0)s} F(s) ds &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{6s} & \frac{1-e^{6s}}{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(6s) \\ \cos(6s) \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{6s} \sin(6s) + \frac{1-e^{6s}}{6} \cos(6s) \\ \cos(6s) \end{pmatrix} ds = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{6t} [\sin(6t) - \cos(6t)] - 1}{12} + \frac{\sin(6t)}{\frac{36}{\sin(6t)}} - \frac{e^{6t} [\sin(6t) + \cos(6t)] + 1}{72} \\ \frac{\sin(6t)}{6} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5e^{6t} \sin(6t) - 7e^{6t} \cos(6t) - 7 + 2\sin(6t)}{\frac{72}{\sin(6t)}} \\ \frac{\sin(6t)}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (223)$$

The solution corresponding to the initial datum $(x_0, y_0) = (0, 0)$ is therefore

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-6t} & \frac{1-e^{-6t}}{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5e^{6t} \sin(6t) - 7e^{6t} \cos(6t) - 7 + 2\sin(6t)}{\frac{72}{\sin(6t)}} \\ \frac{\sin(6t)}{6} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5\sin(6t) - 7\cos(6t) + e^{-6t} [2\sin(6t) - 7] + 2\sin(6t) - 2e^{-6t} \sin(6t)}{\frac{72}{\sin(6t)}} \\ \frac{\sin(6t)}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (224)$$

7.2 Exercise 2

Two bodies of mass $m_1 = 1 \cdot 10^{20} \text{kg}$ and $m_2 = 2 \cdot 10^{22} \text{kg}$ are interacting and exert, on each other, a radial force given by

$$F(\mathbf{r}) = -(A\rho + B\rho^3) \frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \rho = |\mathbf{r}|, \quad A, B > 0. \quad (225)$$

Write down the equations of motion and find three constant of motion. Show there exist a unique value $\bar{\rho}$ of ρ corresponding to a circular trajectory and compute the period in function of $\bar{\rho}$. Plot the potential energy, draw the phase portrait in the plane $(\rho, \dot{\rho})$ and discuss the orbit in the phase space. Write the period of closed orbits as definite integral and estimate it in the case of initial datum $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\sqrt{10}, 0)$ with $L = \sqrt{2}$ and $A = 2, B = 0$ in the limit $\mu \rightarrow 1$. Compute the minimum value of the energy in function of $\bar{\rho}$. Assume $L \neq 0$.

Solution

First of all, let us define

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \simeq 9.95 \cdot 10^{19} \text{kg}, \quad M = m_1 + m_2 = 2.01 \cdot 10^{22}. \quad (226)$$

The potential energy associated to the central force field is

$$V(\rho) = \int (A\rho + B\rho^3) d\rho = A \frac{\rho^2}{2} + B \frac{\rho^4}{4}, \quad (227)$$

so the potential effective energy is

$$V_{eff}(\rho) = A \frac{\rho^2}{2} + B \frac{\rho^4}{4} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}. \quad (228)$$

Let us compute the first and the second derivative of the effective potential energy

$$\begin{aligned} V'_{eff}(\rho) &= A\rho + B\rho^3 - \frac{L^2}{\mu\rho^3}; \\ V''_{eff}(\rho) &= A + 3B\rho^2 + \frac{3L^2}{\mu\rho^4}. \end{aligned} \quad (229)$$

The equation of motion are

$$\mu\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho) = -(A\rho + B\rho^3) + \frac{L^2}{\mu\rho^3}, \quad \dot{\theta} = \frac{L^2}{\mu\rho^2}, \quad M\ddot{\mathbf{R}} = 0; \quad (230)$$

where \mathbf{R} is the center of mass coordinate. The two constant of motion are simply given by the total energy, the energy of the particle with reduced mass and the angular momentum (where we are orienting the system such that the z -axis is parallel to the angular momentum vector)

$$E_{TOT} = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(|\mathbf{r}|), \quad E = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(|\mathbf{r}|), \quad \mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu\rho^2\dot{\theta}. \quad (231)$$

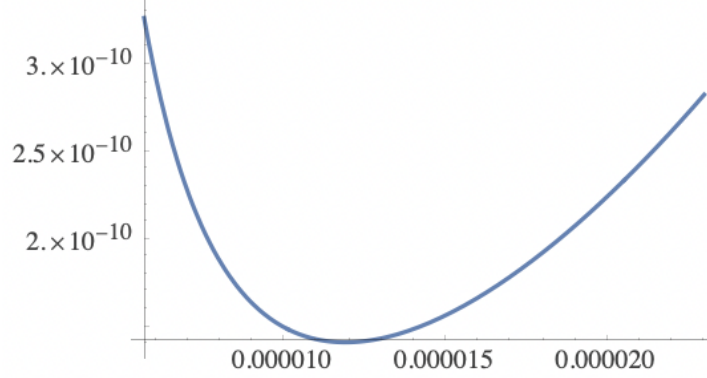
We note we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty \quad (232)$$

and $V''_{eff}(\rho) > 0$ for every value of $\rho \in \mathbb{R}^+$, the function $V_{eff}(\rho)$ has only one minimum. Indeed, surely $V_{eff}(\rho)$ has a minimum point, where $V'_{eff}(\rho)$ vanishes and for Rolle theorem if $V'_{eff}(\rho)$ vanishes in at least two points a and b , then $V''_{eff}(\rho)$ should vanish in an intermediate point $c \in (a, b)$. The period of the circular trajectory is

$$T = 2\pi \frac{\mu \bar{\rho}^2}{L}. \quad (233)$$

The potential energy has one minimum and goes to infinity at the boundary of its definition domain; the plot is



From $E = \frac{\mu \dot{\rho}^2}{2} + V_{eff}(\rho)$ we get

$$\dot{\rho}(\rho) = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(\rho))}. \quad (234)$$

which describe the curves on the phase space. The energy can take only values greater than $V_{eff}(\bar{\rho})$; if $E = V_{eff}(\bar{\rho})$ we have a point in the phase space while for all other values of energy there are only closed orbits. The minimum of the energy is given by

$$E_{min} = V_{eff}(\bar{\rho}) \quad (235)$$

and using

$$V'_{eff}(\bar{\rho}) = 0 \Rightarrow (A\bar{\rho} + B\bar{\rho}^3) = \frac{L^2}{\mu\bar{\rho}^3} \Rightarrow (A\bar{\rho}^2 + B\bar{\rho}^4) = \frac{L^2}{\mu\bar{\rho}^2}, \quad (236)$$

we get

$$E_{min} = A\frac{\bar{\rho}^2}{2} + B\frac{\bar{\rho}^4}{4} + \frac{1}{2}(A\bar{\rho}^2 + B\bar{\rho}^4) = A\bar{\rho}^2 + B\frac{3\bar{\rho}^4}{4} \quad (237)$$

The period of a generic closed orbit is given by the integral

$$\mathcal{T} = 2\sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}} \quad (238)$$

where ρ_{pm} are the roots of $E - V_{eff}(\rho) = 0$. For the initial datum $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\sqrt{10}, 0)$ we have $E = 10 + \frac{1}{10\mu} \simeq 10$; therefore

$$10 - \rho^2 - \frac{1}{\mu\rho^2} = 0 \Rightarrow 10\mu\rho^2 - \mu\rho^4 - 1 = 0 \quad (239)$$

let us call $x = \rho^2$ so

$$10\mu x - \mu x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{\pm} = 5 \pm \sqrt{25\mu - 1}. \quad (240)$$

In the limit $\mu \rightarrow 1$ we get

$$x_{\pm} = 5 \pm \sqrt{25\mu - 1} \rightarrow 5 \pm 2\sqrt{6}; \quad (241)$$

therefore

$$\rho_{+}^{(\pm)} = \pm\sqrt{x_{+}} = \pm\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}, \quad \rho_{-}^{(\pm)} = \pm\sqrt{x_{-}} = \pm\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}. \quad (242)$$

The period is

$$\mathcal{T} = \sqrt{2} \int_{\rho_{-}^{(+)}}^{\rho_{+}^{(+)}} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}} = \sqrt{2} \int_{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}^{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}}; \quad (243)$$

we can estimate writing

$$E - V_{eff}(\rho) = (\rho - \rho_{+}^{(+)}) (\rho - \rho_{-}^{(+)}) \Phi(\rho) \quad (244)$$

such that $\Phi(\rho)$ is $C^2([\rho_{-}^{(+)}, \rho_{+}^{(+)})$; if we are able to find two constants c_1 and c_2 such that

$$c_1 \leq \Phi(\rho) \leq c_2; \quad (245)$$

than

$$\sqrt{\frac{2\pi^2}{c_2}} = \mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_2 = \sqrt{\frac{2\pi^2}{c_1}}. \quad (246)$$

In our case we can write

$$E - V_{eff}(\rho) = (\rho - \rho_{+}^{(+)}) (\rho - \rho_{-}^{(+)}) (\rho - \rho_{+}^{(-)}) (\rho - \rho_{-}^{(-)}), \quad (247)$$

so we have

$$\Phi(\rho) = (\rho - \rho_{+}^{(-)}) (\rho - \rho_{-}^{(-)}) = \rho^2 - (\rho_{+}^{(-)} + \rho_{-}^{(-)})\rho + \rho_{+}^{(-)}\rho_{-}^{(-)} = \rho^2 + 2\sqrt{3}\rho + 1. \quad (248)$$

This is a parabola and since

$$\Phi(\rho_{+}^{(+)}) \simeq 2.2019, \quad \Phi(\rho_{-}^{(+)}) \simeq 21.7983 \Rightarrow 2.2019 \leq \Phi(\rho) \leq 21.7983 \quad (249)$$

we have the estimate

$$0.9516 \leq \mathcal{T} \leq 2.9941. \quad (250)$$

7.3 Esercizio 3

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Al variare di a , si discutano i seguenti punti.

1. Studiare il grafico dell'energia potenziale.
2. Determinare eventuali punti di equilibrio.
3. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi $(x, y) = (x, \dot{x})$.
5. Per $a = -1$ studiare qualitativamente la traiettoria con posizione iniziale $x(0) = -1$ ed energia nulla e dire se esiste un tempo finito T in cui la soluzione attraversa l'asse y .

Soluzione

1. Si noti che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = \mp 1$ e che $V'(x) = \frac{2}{\pi} \frac{ax-x^2}{1+(a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})^2}$, da cui segue che:

- Se $a > 0$, $V'(x) > 0$ per $x \in (0, a)$ e $V'(x) < 0$ per $x < 0$ e $x > a$.
- Se $a < 0$, $V'(x) > 0$ per $x \in (a, 0)$ e $V'(x) < 0$ per $x < a$ e $x > 0$.
- Se $a = 0$, $V'(x) < 0$ per $x \neq 0$.

Pertanto:

- Se $a > 0$, $x = 0$ è un punto di minimo per $V(x)$ e $x = a$ è un punto di massimo per $V(x)$.
- Se $a < 0$, $x = a$ è un punto di minimo per $V(x)$ e $x = 0$ è un punto di massimo per $V(x)$.
- Se $a = 0$, $x = 0$ è un flesso a tangente orizzontale.

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, pertanto, l'energia potenziale ha i seguenti grafici:

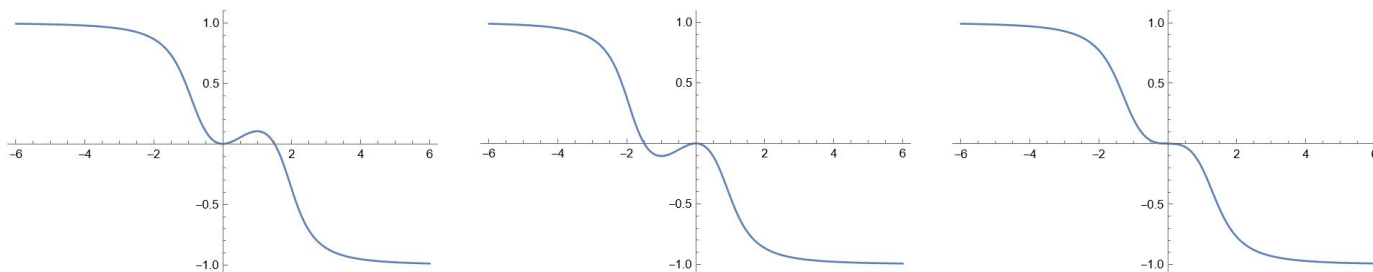


Figure 3: $V(x)$ rispettivamente per $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$.

2. Il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{ax-x^2}{1+(a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})^2} \end{cases} .$$

I punti di equilibrio sono le coppie della forma $(x_0, 0)$, dove x_0 è un punto critico di $V(x)$. Pertanto, al variare di a si avrà:

- Se $a > 0$ ci sono due punti di equilibrio $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (a, 0)$.
- Se $a < 0$ ci sono due punti di equilibrio $P_1 = (a, 0)$ e $P_2 = (0, 0)$.
- Se $a = 0$ c'è un unico punto di equilibrio $P_1 = (0, 0)$.

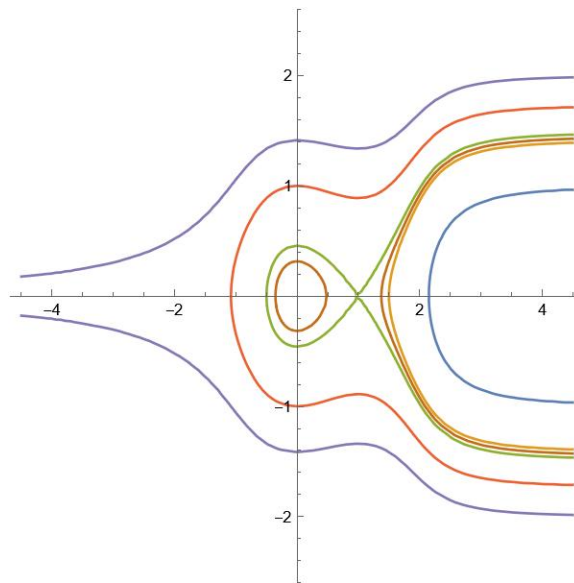
3. Dal teorema di Dirichlet si ha che:

- Se $a > 0$, P_1 è stabile (in quanto punto di minimo del potenziale) e P_2 è instabile (in quanto punto di massimo del potenziale).
- Se $a < 0$, P_1 è stabile (in quanto punto di minimo del potenziale) e P_2 è instabile (in quanto punto di massimo del potenziale).
- Se $a = 0$, P_1 è instabile (in quanto flesso a tangente orizzontale).

4. A partire dal grafico dell'energia potenziale, si può ricavare quello delle curve di livello nel piano delle fasi. Si noti che il moto è possibile solo per energie $E > -1$ e che le orbite sono percorse da sinistra verso destra nel semipiano superiore e da destra verso sinistra in quello inferiore. In particolare:

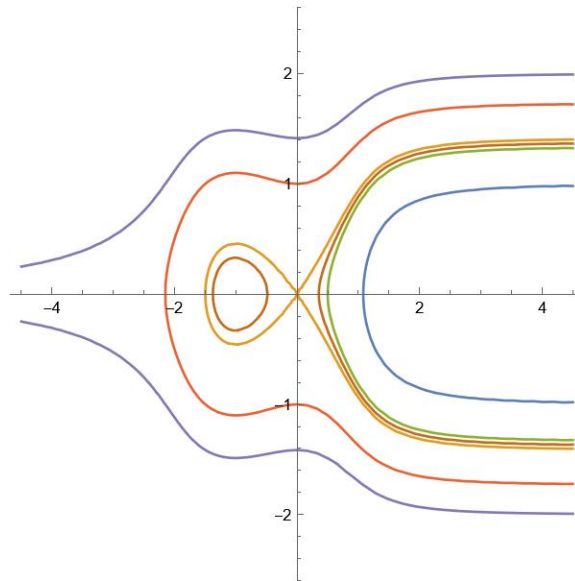
- Se $a > 0$, per $-1 < E < 0$ si ha un'orbita aperta, per $E = 0$ si hanno il punto di equilibrio stabile e un'orbita aperta, per $0 < E < V(a)$ si hanno un'orbita chiusa periodica intorno al punto di equilibrio stabile e un'orbita aperta, per $E = V(a)$ si hanno un'orbita chiusa aperiodica, il punto di equilibrio instabile e due orbite aperte, per $V(a) < E < 1$ si ha un'orbita aperta, per $E \geq 1$ si hanno due orbite aperte.

Nel piano delle fasi, il moto è il seguente:



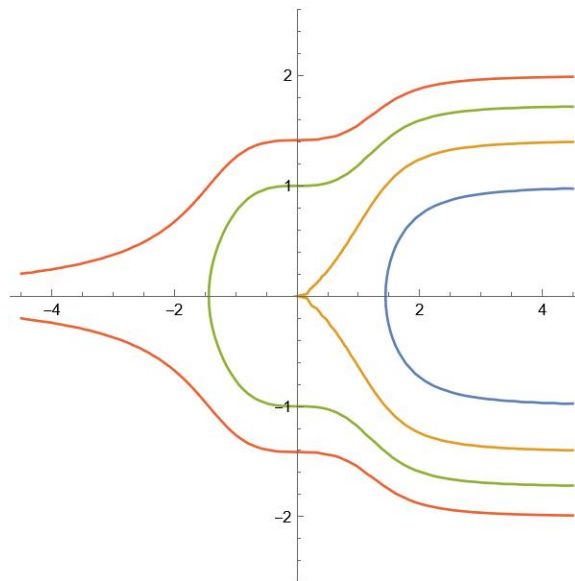
- Se $a < 0$, per $-1 < E < V(a)$ si ha un'orbita aperta, per $E = V(a)$ si hanno il punto di equilibrio stabile e un'orbita aperta, per $V(a) < E < 0$ si hanno un'orbita chiusa periodica intorno al punto di equilibrio stabile e un'orbita aperta, per $E = 0$ si hanno un'orbita chiusa aperiodica, il punto di equilibrio instabile e due orbite aperte, per $0 < E < 1$ si ha un'orbita aperta, per $E \geq 1$ si hanno due orbite aperte.

Nel piano delle fasi, il moto è il seguente:



- Se $a = 0$, per $-1 < E < 0$ si ha un'orbita aperta, per $E = 0$ si hanno il punto di equilibrio instabile e due orbite aperte, per $0 < E < 1$ si ha un'orbita aperta, per $E \geq 1$ si hanno due orbite aperte.

Nel piano delle fasi, il moto è il seguente:



5. Per $a = -1$, il dato iniziale $(x(0), y(0))$ con $x(0) = -1$ ed energia $E = 0$ si trova sulla curva di livello contenente il punto di equilibrio instabile. Per qualsiasi valore di $y(0)$, la traiettoria tende asintoticamente a $x = 0$, sia per $t \rightarrow +\infty$ che per $t \rightarrow -\infty$. Pertanto, non esistono tempi T finiti tali che $x(T) = 0$.

7.4 Esercizio 4

Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove lungo l'asse y con legge oraria $y_{O'}(t) = a \sin t$,

mentre il sistema ruota intorno all'asse verticale con velocità angolare $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$. All'istante $t = 0$ i due sistemi di riferimento coincidono.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ è fisso nel sistema K nella posizione $(1, 0, 0)$.

1. Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = C \circ B$, e determinare C e B .
2. Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .
3. Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .
4. Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .
5. Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .
6. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P .
7. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P .

Soluzione

1. Si ha che

$$\mathbf{r} = \mathbf{q}_{O'} = (0, a \sin t, 0)$$

e

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $\dot{\theta}(t) = \omega(t) = a \cos t$, da cui segue che $\theta(t) = a \sin t + c$. Si noti che la costante c va scelta in modo tale che $\theta(0) = 0$, cioè $c = 0$ e quindi $\theta(t) = a \sin t$.

Quindi, $\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r}$ con $\mathbf{Q} = (1, 0, 0)$, da cui segue che

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= (\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0) + (0, a \sin t, 0) = \\ &= (\cos \theta(t), \sin \theta(t) + a \sin t, 0). \end{aligned}$$

2. La velocità assoluta è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} &= (-\dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + a \cos t, 0) = \\ &= (-a \cos t \sin \theta(t), a \cos t \cos \theta(t) + a \cos t, 0). \end{aligned}$$

3. La velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} = (0, 0, 0).$$

4. La componente traslatoria della velocità di trascinamento è data da

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = (0, a \cos t, 0).$$

5. La componente rotatoria della velocità di trascinamento è data da

$$\mathbf{v}_T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} - \mathbf{r},$$

dove $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t)) = (0, 0, a \sin t)$ e $\mathbf{q} - \mathbf{r} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0)$, da cui segue che

$$\mathbf{v}_T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a \sin t \\ \cos \theta(t) & \sin \theta(t) & 0 \end{vmatrix} = (-a \sin t \sin \theta(t), a \sin t \cos \theta(t), 0).$$

6. La forza di Coriolis è data da

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0},$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = B^{-1}\boldsymbol{\omega} = (0, 0, a \sin t)$.

7. La forza centrifuga è data da

$$\mathbf{F}_{cf} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}),$$

dove $\mathbf{Q} = (1, 0, 0)$.

Si ha

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a \sin t \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, a \sin t, 0)$$

e

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a \sin t \\ 0 & a \sin t & 0 \end{vmatrix} = (-a^2 \sin^2 t, 0, 0),$$

da cui segue che

$$\mathbf{F}_{cf} = (a^2 \sin^2 t, 0, 0).$$

8 VIII: Lagrangians and Euler-Lagrange equations

8.1 Exercise 1

Given the following lagrangian

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 \quad (251)$$

find the equations of motion. Find the kinetic and potential energy of the system and claim what the system consists of. Find the normal mode oscillation frequencies.

Solution

The Euler-Lagrange equations are

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}; \quad (252)$$

where $q = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. The equations of motion are given by

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k'(x_2 - x_1); \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k'(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (253)$$

From the physical definition of lagrangian we have

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \quad E_{pot} = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2. \quad (254)$$

The system consists of two bodies attached to three springs: it is a coupled pendulum. To find the normal modes oscillation frequencies we can assume the solutions $x_1 = A_1 e^{i\omega t}$ and $x_2 = A_2 e^{i\omega t}$. Inserting in the equation of motion we get

$$\begin{pmatrix} (k+k') - m\omega^2 & -k' \\ -k' & (k+k') - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (255)$$

From linear algebra, the not trivial solutions are there if and only if

$$((k+k') - m\omega^2)^2 - (k')^2 = 0 \Rightarrow (k+k') - m\omega^2 = \pm k', \quad (256)$$

whose solutions are

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}. \quad (257)$$

8.2 Exercise 2

Given the following lagrangian of a spherical symmetry system

$$L(x, \dot{x}, r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{x}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2, \quad (258)$$

find the Euler-Lagrange equations for x, θ, ϕ and find a solution.

Solution

The Euler-Lagrange equations are

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}; \quad (259)$$

where $q = (x, r, \theta, \phi)$. Therefore:

- equation for \dot{x} :

$$\frac{d}{dt} \left[2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{x} \right] = 0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{\text{const}_1}{\left(1 - \frac{2m}{r} \right)}; \quad (260)$$

- equation for $\dot{\phi}$:

$$\frac{d}{dt} [2r^2 \sin^2(\theta)] \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\text{const}_2}{r^2 \sin^2(\theta)}. \quad (261)$$

- equation for $\dot{\theta}$:

$$2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = \frac{d}{dq} (2r^2 \dot{\theta}) \Rightarrow 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = 4r \dot{r} \dot{\theta} + 2r^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 - \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta}. \quad (262)$$

The equation is not trivial like the previous ones and we need some "initial" conditions; given the spherical symmetry we can impose that for a certain value of time, $t = t_0$ we have $\theta(t_0) = \theta_0$ and $\dot{\theta}(t_0) = 0$. We therefore have a Cauchy problem and supposing the necessary Lipschitzianity the problem admits a unique solution. Since by value $\theta(t) = \theta_0$ we satisfy both the equation and the initial conditions, we can say that it is the only solution; this implies that the motion is planar. The equation for θ is simply

$$\theta(t) = \theta_0. \quad (263)$$

8.3 Exercise 3

Given the following dynamical system

$$3\ddot{x} = 3x^2 + \frac{1}{x} - 2\dot{x} \quad (264)$$

find a possible lagrangian.

Solutions

The equation of motions are the form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (265)$$

We know that the kinetic energy is a quadratic form of \dot{x} , so

$$K = \frac{3}{2} \dot{x}^2; \quad (266)$$

we compute

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{x} - 2\dot{x} \Rightarrow V(x, \dot{x}, t) = -x^3 - \ln(|x|) + 2\dot{x}x - f(\dot{x}, t), \quad (267)$$

but

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right] = -2\dot{x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f(\dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = 3\ddot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[-2x + \frac{\partial f(\dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right] = \frac{d}{dt} \left[3 \frac{dx}{dt} \right], \quad (268)$$

so

$$-2x + \frac{\partial f(\dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = 3\dot{x} + c_1. \quad (269)$$

This means that

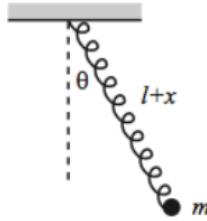
$$f(\dot{x}, t) = 2x\dot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2 + c_2, \quad (270)$$

but $f(\dot{x}, t)$ must have no dependence from x , therefore no lagrangian exists for this equation.

8.4 Esercizio 4

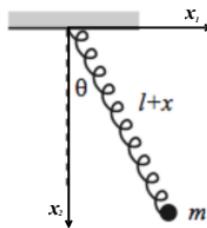
Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza a riposo ℓ e di costante elastica k sospesa ad un punto di sospensione O , al cui estremo libero è appesa una massa m .

Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle coordinate x e θ , dove $\ell + x$ è la lunghezza della molla e θ è l'angolo formato con la verticale, come in figura. Si determinino, quindi, le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.



Soluzione

Si consideri il sistema di riferimento riportato di seguito:



Sappiamo che la Lagrangiana è definita come $\mathcal{L} := T - U$ dove T è l'energia cinetica e U è il potenziale.

Nel sistema di riferimento che stiamo considerando, le coordinate $x_{1,m}$ e $x_{2,m}$ del punto di massa m nelle coordinate x e θ sono date da

$$\begin{cases} x_{1,m} = (\ell + x) \sin \theta \\ x_{2,m} = (\ell + x) \cos \theta \end{cases},$$

da cui segue che

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,m} = \dot{x} \sin \theta + \dot{\theta}(\ell + x) \cos \theta \\ \dot{x}_{2,m} = \dot{x} \cos \theta - \dot{\theta}(\ell + x) \sin \theta \end{cases}.$$

L'energia cinetica è data pertanto da

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{1,m} + \dot{x}_{2,m}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2(\ell + x)^2).$$

Per quanto riguarda il potenziale, invece, notiamo che il corpo di massa m è soggetto sia alla forza peso che alla forza elastica, pertanto U sarà dato da

$$U = U_{el} + U_{grav} = \frac{1}{2}kx^2 - mg(\ell + x)\cos\theta.$$

La Lagrangiana sarà quindi

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2(\ell + x)^2) - \frac{1}{2}kx^2 + mg(\ell + x)\cos\theta.$$

Calcoliamo ora le equazioni di Eulero-Lagrange:

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta;$
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Rightarrow m\ddot{\theta}(\ell + x)^2 + 2m\dot{\theta}\dot{x}(\ell + x) = -mg(\ell + x)\sin\theta.$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta \\ m\ddot{\theta}(\ell + x)^2 + 2m\dot{\theta}\dot{x}(\ell + x) = -mg(\ell + x)\sin\theta \end{cases}.$$

8.5 Esercizio 5

Dati $m > 0$ ed $e \in \mathbb{R}$, scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema tridimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - eV(\mathbf{x}) + e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

dove $V(\mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ sono due funzioni di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (V è una funzione scalare a valori in \mathbb{R} e \mathbf{A} è una funzione vettoriale a valori in \mathbb{R}^3).

Si riconosca che le equazioni del moto coincidono con le equazioni del moto di una particella di carica e in un campo elettrico $\mathbf{E} = -\nabla V$ e campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Soluzione

Notiamo che, dato $\mathbf{x} = (x, y, z)$, si ha

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eV(x, y, z) + e(\dot{x}A_1(x, y, z) + \dot{y}A_2(x, y, z) + \dot{z}A_3(x, y, z)).$$

Si ha, quindi:

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_1}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_1}{\partial z}\right) = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial x}\right);$
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_2}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_2}{\partial z}\right) = -e\frac{\partial V}{\partial y} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial y}\right);$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} + e \left(\dot{x} \frac{\partial A_3}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_3}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) = -e \frac{\partial V}{\partial z} + e \left(\dot{x} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial A_2}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial A_3}{\partial z} \right).$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono, pertanto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e \frac{\partial V}{\partial x} + e \left[\dot{y} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) + \dot{z} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) \right] \\ m\ddot{y} = -e \frac{\partial V}{\partial y} + e \left[\dot{x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) + \dot{z} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \right] \\ m\ddot{z} = -e \frac{\partial V}{\partial z} + e \left[\dot{x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \dot{y} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial y} \right) \right] \end{cases}.$$

Ora,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix},$$

per cui le equazioni di Eulero-Lagrange si possono scrivere come

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eE_1 + e(\dot{y}B_3 - \dot{z}B_2) \\ m\ddot{y} = eE_2 + e(-\dot{x}B_3 + \dot{z}B_1) \\ m\ddot{z} = eE_3 + e(\dot{x}B_2 - \dot{y}B_1) \end{cases},$$

in forma vettoriale equivalenti a

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$$

che sono le equazioni del moto di una particella di carica e in un campo elettrico \mathbf{E} e campo magnetico \mathbf{B} .

8.6 Esercizio 6

Stabilire che forma assumono le equazioni di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x})$, per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, in coordinate sferiche. In particolare, data la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \equiv \mathbf{f}(r, \theta, \phi),$$

determinare la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ corrispondente alla Lagrangiana meccanica $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - U(\mathbf{x})$ nelle nuove coordinate. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$. Si riconosca, infine, che se il potenziale $V(r, \theta, \phi) = U(\mathbf{f}(r, \theta, \phi))$ dipende dalle sole variabili r e θ , allora il sistema ammette una grandezza conservata e si determini tale grandezza.

Soluzione

Data la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix},$$

si ha che

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix},$$

che implica

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta.$$

Pertanto, la Lagrangiana nelle nuove coordinate sarà data da

$$\tilde{\mathcal{L}}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - V(r, \theta, \phi).$$

Calcoliamo ora le equazioni di Eulero-Lagrange:

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial r} \Rightarrow m \ddot{r} = m r (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{\partial V}{\partial r};$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \theta} \Rightarrow m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} = m r^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial \theta};$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} \Rightarrow m r^2 \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2 m r \dot{r} \dot{\phi} \sin^2 \theta + 2 m r^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = - \frac{\partial V}{\partial \phi}.$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m \ddot{r} = m r (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{\partial V}{\partial r} \\ m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} = m r^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ m r^2 \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2 m r \dot{r} \dot{\phi} \sin^2 \theta + 2 m r^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = - \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{cases}.$$

Ora, se il potenziale V dipende solo dalle variabili r e θ , allora $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} = 0$ e perciò si ha $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\phi}} = 0$, cioè

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \equiv p_\phi$$

dove p_ϕ è una costante del moto.

9 IX: Lagrangian systems 1

9.1 Exercise 1

Given an open string, derive the equation of motion using the stationary-action principle and the following the steps:

1. find the area functional of an euclidean 2-dimensional surface using the two parameters τ and σ ;
2. show that $\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 > 0$ using that every tangent vector can be written as combination of $\frac{\partial X}{\partial \tau}$ and $\frac{\partial X}{\partial \sigma}$. Write down the right area functional for a Lorentzian 2-dimensional surface where $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$ is the time direction and $\sigma \in [0, \sigma_s]$ the spatial one;
3. find the equation of motion discussing the boundary conditions fixing.

Solution

As first step we need to find the area functional of a 2-dimensional euclidean surface Σ_2 . To describe a surface we need two parameters that we will call τ and σ , and a vector map which associates a point of the surface at each point of the parametrization space, the two-dimensional space (τ, σ) , $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^d$ such that $d \geq 2$ and

$$(\tau, \sigma) \mapsto \vec{X} = (X_1(\tau, \sigma), \dots, X_d(\tau, \sigma)). \quad (271)$$

Since this is an immersion we have $\text{rank}(dX) = \dim(\mathbb{R}^2)$ so

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \tau} & \dots & \frac{\partial X_d}{\partial \tau} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \sigma} & \dots & \frac{\partial X_d}{\partial \sigma} \end{pmatrix} = 2. \quad (272)$$

In general, any infinitesimal rectangle in the space (τ, σ) will be mapped to a generic quadrilateral with sides $d\vec{v}_1$ and $d\vec{v}_2$. The differential of a generic vector $\vec{X}(\tau, \sigma)$ can be written as

$$d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (273)$$

furthermore the vectors $d\vec{v}_1$ and $d\vec{v}_2$ are respectively the images of the vectors $(d\tau, 0)$ and $(0, d\sigma)$ so

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} d\tau; \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} d\sigma. \quad (274)$$

Using the formula for the area of a parallelogram, it is possible to determine the area of the generic quadrilateral on the surface

$$dA = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \text{sen}(\theta) = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 \cos^2(\theta)}, \quad (275)$$

where θ is the angle between the two vectors and the fundamental trigonometric relation has been used. Expressing 275 by means of the Euclidean scalar product we obtain

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}. \quad (276)$$

Thanks to 274 and integrating

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2}. \quad (277)$$

The positivity of the quantity under the root is a direct consequence of Schwarz's inequality.

In the second step, we have to show that we need to change the sign in the area functional if we are talking about of a 2-dimensional Lorentzian surface. Let us do it. Any vector tangent to a given point can be written as

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \Rightarrow v^2(\lambda) = \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 + 2\lambda \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}, \quad (278)$$

with $\lambda \in (-\infty, \infty)$ and $\mu \in I := (0, \dots, d-1)$. Since $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ and $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ are linearly independent due to 272, varying the parameter λ we get all the vectors tangent to a generic point. Since 278 must be able to describe both time-like and space-like vectors, there must be a value of the parameter λ such that $v^2(\lambda = \tilde{\lambda}) = 0$;

$$v^2(\tilde{\lambda}) = \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 + \tilde{\lambda}^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 + 2\tilde{\lambda} \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0, \quad (279)$$

where the implication is due to the fact that the equation $v^2(\tilde{\lambda}) = 0$ must have two real roots in order to give rise to time-like ($v^2 < 0$) and space-like ($v^2 > 0$). Therefore its discriminant, Δ , must be positive

$$\Delta = 4 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 > 0. \quad (280)$$

Therefore for a 2-dimensional Lorentzian surface the area functional is

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)}. \quad (281)$$

The third step ask for the equation of motion using the stationarity of the action that in this case is a area functional. To begin we rewrite the action in terms of the Lagrangian density

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu), \quad (282)$$

where $\mathcal{L} = \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$, $\dot{X} := \frac{\partial X}{\partial \tau}$ and $X' := \frac{\partial X}{\partial \sigma}$.

By varying the action 282 we have to evaluate the variation of the Lagrangian density, in fact

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \delta(\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu)) = \int d\tau d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right], \quad (283)$$

and we define

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} &= \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} := \Omega_\mu; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} &= \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} := \Theta_\mu. \end{aligned} \quad (284)$$

Making the integration extremes explicit, writing the action in terms of the derivatives of $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}(\delta X^\mu)$ with respect to τ and $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}(\delta X^\mu)$ with respect to σ , using 284 and imposing stationarity, we obtain

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_s} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\Omega_\mu \delta X^\mu) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Theta_\mu \delta X^\mu) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial \sigma} \right) \right] = 0. \quad (285)$$

The first term is vanishing since it returns a quantity proportional to $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$ and $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$ but the stationarity principle impose that the variation at the extremes is vanishing. The second term can be rewritten:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_s} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (\Theta_\mu \delta X^\mu) \right] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\Theta_\mu \delta X^\mu]_0^{\sigma_s}, \quad (286)$$

where σ_s is the length of the string and expanding we obtain

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(-\Theta_0(\tau, \sigma_s) \delta X^0(\tau, \sigma_s) + \Theta_0(\tau, 0) \delta X^0(\tau, 0) + \dots + \Theta_{d-1}(\tau, \sigma_s) \delta X^{d-1}(\tau, \sigma_s) - \Theta_{d-1}(\tau, 0) \delta X^{d-1}(\tau, 0) \right); \quad (287)$$

To cancel this term we need several boundary conditions; these conditions can be applied to Θ_μ or to δX^μ :

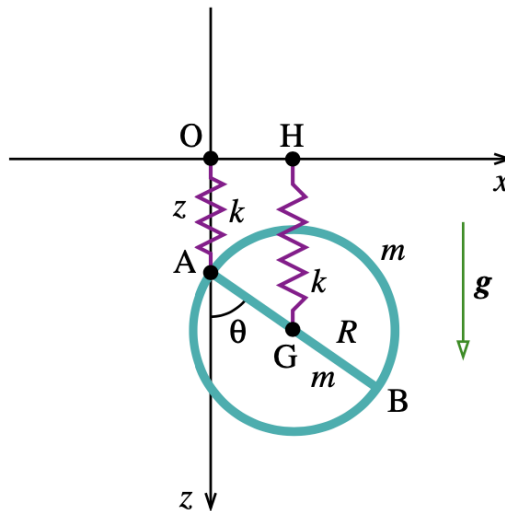
- $\Theta_\mu(\tau, \sigma_b) = 0 \Rightarrow$ Neumann conditions;
- $\delta X_\mu(\tau, \sigma_b) = 0 \Rightarrow$ Dirichlet conditions;

being $\sigma_b = 0$ or $\sigma_b = \sigma_s$. The equations of motion are then

$$\frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial \sigma} = 0. \quad (288)$$

9.2 Exercise 2

In a vertical plane, on which a system of orthogonal Cartesian axes Oxz is fixed, with vertical descending axis z , moves the rigid system formed by a homogeneous circular guide, of radius R and mass m , and by a homogeneous bar, of length $2R$ and mass m , welded on the diameter AB of the circular guide (see figure below). The point A of the system is constrained to slide without friction along the Oz axis. The active forces $F_1 = -kOA$ act on the system, with $k > 0$, $F_2 = -kHG$, where G is the center of mass of the system and H is the orthogonal projection of G on the Ox axis, and the weight force, directed in the positive direction of the Oz axis. Let $g > 0$ denote the acceleration due to gravity. The z coordinate of A and the angle θ that AB forms with the positive direction of the Oz axis are adopted as Lagrangian coordinates. Consider the bar and the guide as one-dimensional.



1. Write the Lagrange function L of the system and the equations of motion;
2. find the equilibrium positions of the system and discuss their number and stability as the parameter varies $\lambda = mg \in \mathbb{R}^+$.

Solution

We have $x_G = R\sin(\theta)$ and $z_G = z + R\cos(\theta)$, moreover the body can rotate around the axis passing through the point A since the point A is constrained to move along the axis. Therefore we have

$$K = \frac{1}{2}(2m)(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}I_G^{(tot)}\dot{\theta}^2 \quad (289)$$

where the $2m$ is due to the sum $m + m$ and $I_G^{(tot)} = I_G^{guide} + I_G^{(bar)}$. Let us compute the inertial momenta:

$$I_G^{(bar)} = \int_{-R}^R x^2 dm = \int_{-R}^R x^2 \rho dx = \rho \frac{2R^3}{3} = \frac{mR^2}{3},$$

$$I_G^{(guide)} = \int_0^{2\pi} R^3 \rho r \theta = mR^2. \quad (290)$$

Therefore

$$I_G^{(tot)} = \frac{4}{3}mR^2, \quad (291)$$

and

$$K = \frac{m}{2} \left[2\dot{z}^2 + \frac{8}{3}R^2\dot{\theta}^2 - 4R\sin(\theta)\dot{z}\dot{\theta} \right]. \quad (292)$$

The potential energy is given by

$$U = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k(z + R\cos(\theta))^2 - 2mg(z + R\cos(\theta)). \quad (293)$$

The Lagrangian function is therefore

$$L = K - U. \quad (294)$$

We have

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 2m\dot{z} - 2mR\sin(\theta)\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{8}{3}mR^2\dot{\theta} - 2mR\sin(\theta)\dot{z}; \quad (295)$$

and

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -kz - k(z + R\cos(\theta)) + 2mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = k(z + R\cos(\theta))R\sin(\theta) - 2mgR\sin(\theta). \quad (296)$$

Therefore, the Euler-Lagrange equations are

$$2m\ddot{z} - 2mR(\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)\ddot{\theta}) = -kz - k(z + R\cos(\theta)) + 2mg,$$

$$\frac{8}{3}mR^2\ddot{\theta} - 2mR(\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + \sin(\theta)\ddot{z}) = k(z + R\cos(\theta))R\sin(\theta) - 2mgR\sin(\theta). \quad (297)$$

The derivative of the potential energy are just found to be

$$\frac{\partial U}{\partial z} = kz + k(z + R\cos(\theta)) - 2mg \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -k(z + R\cos(\theta))R\sin(\theta) + 2mgR\sin(\theta); \quad (298)$$

the equilibrium points are the stationary points of the potential energy, therefore

$$\begin{cases} z + \frac{R}{2}\cos(\theta) = \frac{mg}{k}, \\ (z + R\cos(\theta) - \frac{2mg}{k})\sin(\theta) = 0. \end{cases} \quad (299)$$

We have four solutions:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\theta_1 = 0, z_1 = \frac{mg}{k} - \frac{R}{2} \right); \\ P_2 &= \left(\theta_2 = 0, z_2 = \frac{mg}{k} + \frac{R}{2} \right); \\ P_3 &= \left(\theta_3 = +\arccos\left(\frac{2mg}{kR}\right), z_3 = 0 \right); \\ P_4 &= \left(\theta_4 = -\arccos\left(\frac{2mg}{kR}\right), z_4 = 0 \right); \end{aligned} \quad (300)$$

and to study the stability we need to compute the hessian of the potential energy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \theta} = R\cos(\theta)[2mg - k(z + R\cos(\theta))] + kR^2\sin^2(\theta), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -kR\sin(\theta). \quad (301)$$

The Hessian in the first position is $2k^2R^2\left(\frac{mg}{kR} - \frac{1}{2}\right)$ and since $\partial_{zz}^2 U < 0$ the necessary and sufficient condition of stable equilibrium is that the Hessian is positive. We therefore have that the equilibrium position (z_1, θ_1) is stable for $\lambda > \frac{1}{2}$. The Hessian in the first position is $2k^2R^2\left(\frac{mg}{kR} + \frac{1}{2}\right)$ and since $\partial_{zz}^2 U < 0$ the necessary and sufficient condition of stable equilibrium is that the Hessian is positive. We therefore have that the equilibrium position (z_2, θ_2) is stable for $\lambda \geq 0$. In positions P_3 and P_4 the Hessian is $k^2R^2\sin^2(\theta)$ is always positive, therefore these equilibrium positions are stable when they exist, i.e. for $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.

9.3 Esercizio 3

Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso su una superficie sferica liscia (vincolo ideale) di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \ell^2$, dove ℓ è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche:

$$\mathbf{x} = \ell \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \phi \\ 1 - \cos \alpha \end{pmatrix}$$

e si scriva la Lagrangiana \mathcal{L} del sistema vincolato usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\alpha, \phi, \dot{\alpha}, \dot{\phi})$. Inoltre, si noti che \mathcal{L} è indipendente da ϕ (in questo caso si dice che ϕ è una variabile ciclica).

2. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E ed un secondo integrale primo $A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$.
3. Usando la conservazione di A , si elimini la dipendenza da $\dot{\phi}$ nell'espressione di E e si esprima così l'energia meccanica del sistema in funzione di $\alpha, \dot{\alpha}$ e di A nella forma $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + V_{eff}(\alpha)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\alpha)$?
4. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto nella variabile α .

Soluzione

1. Data la parametrizzazione in coordinate sferiche si ha che

$$\dot{\mathbf{x}} = \ell \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \phi - \dot{\phi} \sin \alpha \sin \phi \\ \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \phi + \dot{\phi} \sin \alpha \cos \phi \\ \dot{\alpha} \sin \alpha \end{pmatrix},$$

da cui segue che

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \ell^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha).$$

La Lagrangiana del sistema nelle variabili $\alpha, \phi, \dot{\alpha}, \dot{\phi}$ è data quindi da

$$\mathcal{L}(\alpha, \phi, \dot{\alpha}, \dot{\phi}) := T - V = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - mgz = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha) - mg\ell(1 - \cos \alpha).$$

Si noti che la Lagrangiana non dipende dalla variabile angolare ϕ , i.e. ϕ è una variabile ciclica.

2. Calcoliamo le equazioni di Eulero-Lagrange:

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \Rightarrow m\ell^2 \ddot{\alpha} = m\ell^2 \dot{\phi}^2 \sin \alpha \cos \alpha - mg\ell \sin \alpha;$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Rightarrow m\ell^2 \ddot{\phi} \sin^2 \alpha + 2m\ell^2 \dot{\alpha} \dot{\phi} \sin \alpha \cos \alpha = 0.$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono date quindi da

$$\begin{cases} m\ell^2 \ddot{\alpha} = m\ell^2 \dot{\phi}^2 \sin \alpha \cos \alpha - mg\ell \sin \alpha \\ m\ell^2 \ddot{\phi} \sin^2 \alpha + 2m\ell^2 \dot{\alpha} \dot{\phi} \sin \alpha \cos \alpha = 0 \end{cases}.$$

La seconda delle equazioni ci dice che

$$A := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2 \dot{\phi} \sin^2 \alpha$$

è una costante del moto.

Vediamo che anche l'energia meccanica

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha) + mg\ell(1 - \cos \alpha)$$

è una quantità conservata:

$$\frac{d}{dt} E = m\ell^2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m\ell^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} \sin^2 \alpha + m\ell^2 \dot{\alpha} \dot{\phi}^2 \cos \alpha \sin \alpha + mg\ell \dot{\alpha} \sin \alpha = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza segue in modo diretto dalle equazioni di Eulero-Lagrange.

3. Dalla conservazione di A si ha che:

- (i) se $A = 0$ allora $\dot{\phi} \sin \alpha \equiv 0$, che implica che l'equazione del moto per α è $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{\ell} \sin \alpha$, i.e. il moto si riduce a quello di un pendolo semplice bidimensionale;

(ii) Se $A \neq 0$ allora $\dot{\phi} = \frac{A}{m\ell^2 \sin^2 \alpha}$. Sostituendo questo valore nell'equazione dell'energia totale otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\alpha}^2 + \left(\frac{A^2}{2m\ell^2 \sin^2 \alpha} + mg\ell(1 - \cos \alpha) \right) =: \frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\alpha}^2 + V_{eff}(\alpha),$$

$$\text{con } V_{eff}(\alpha) := \frac{A^2}{2m\ell^2 \sin^2 \alpha} + mg\ell(1 - \cos \alpha).$$

4. Dobbiamo ora studiare il moto per $A \neq 0$ e $\alpha \in (0, \pi)$.

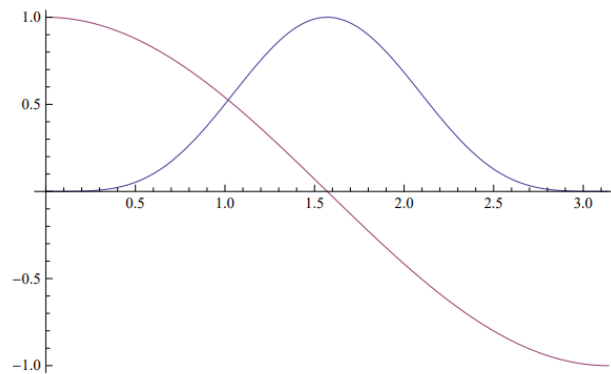
Notiamo che $\lim_{\alpha \rightarrow 0} V_{eff}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi} V_{eff}(\alpha) = +\infty$. I punti di equilibrio sono quelli che soddisfano l'equazione

$$V'_{eff}(\alpha) = \frac{-A^2 \cos \alpha}{m\ell^2 \sin^2 \alpha} + mg\ell \sin \alpha = 0,$$

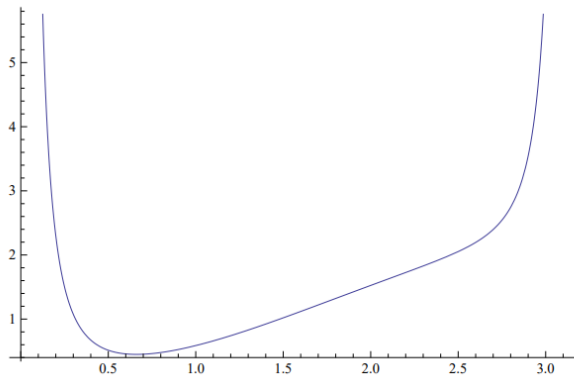
i.e. quelli tali che

$$mg\ell \sin^4 \alpha - \frac{A^2}{m\ell^2} \cos \alpha = 0.$$

Per capire quante radici ha l'ultima equazione, usiamo il metodo grafico, da cui segue che l'equazione ammette una ed una sola radice in $(0, \pi)$, che chiamiamo α^* , come riportato in figura:



Il grafico di V_{eff} è quello riportato di seguito:



Pertanto:

- per $E < V_{eff}(\alpha^*)$ non esistono moti;
- per $E = V_{eff}(\alpha^*)$ si ha la soluzione di equilibrio $\alpha = \alpha^*$. Inoltre, dalle equazioni di Eulero-Lagrange sappiamo che $\dot{\phi} = const$, pertanto il moto complessivo è circolare uniforme e si svolge sul parallelo identificato dall'angolo α^* ;
- per $E > V_{eff}(\alpha^*)$ il moto della variabile α è periodico tra i punti α_- e α_+ soluzioni dell'equazione $V_{eff}(\alpha) = E$. Il periodo è dato da

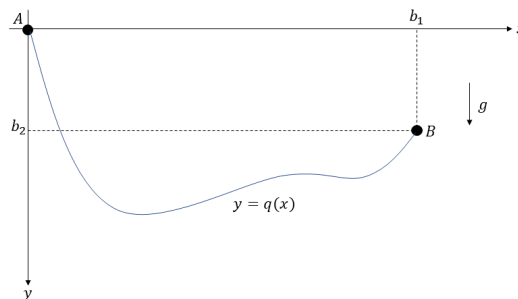
$$T_1 = 2 \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}(E - V_{eff}(\alpha))}}.$$

Il moto complessivo è periodico o quasi-periodico a seconda del valore, razionale o irrazionale, di $\frac{T_1}{T_2}$, dove T_2 è il periodo della soluzione dell'equazione per ϕ .

9.4 Esercizio 4

Tra tutte le curve che passano per due punti A e B in un piano verticale (con B ad un'altezza minore o uguale di quella di A), determinare quella che gode della proprietà seguente: una particella inizialmente in quiete in A che cade lungo la curva sotto l'influenza della gravità e in assenza di attrito impiega il tempo minimo per raggiungere B (tale curva si chiama *brachistocrona*).

A tale scopo, una volta fissato un sistema di coordinate come in figura:



1. si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

$$A_{0,b_1}^{\mathcal{L}}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) dx, \quad \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) := \sqrt{\frac{1 + \dot{q}^2}{2gq}}$$

nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0, b_2)$. Qui g è l'accelerazione di gravità, $y = q(x)$ rappresenta il profilo della curva, $A_{0,b_1}^{\mathcal{L}}(q)$ ha il significato fisico di "tempo necessario a percorrere la curva $y = q(x)$ da A a B " e il puntino in $\dot{q}(x)$ rappresenta la derivata rispetto a x .

[Suggerimento: si usi la conservazione dell'energia meccanica $E = \frac{1}{2}mv^2(x) - mgq(x)$ per ricavare la velocità della particella nel punto $(x, q(x))$ e quindi il tempo di percorrenza.]

2. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.
3. Si mostri che tale equazione è risolta da una *cicloide* con cuspidi nel punto di partenza.
[Suggerimento: si ricordi che l'equazione parametrica di una cicloide con cuspidi nell'origine è

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

da cui si vede che la sua equazione cartesiana ha la forma $y = r \left(1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r}\right)\right)$, dove $\phi = h^{-1}$ è la funzione inversa di $h(t) = t - \sin t$.]

Soluzione

1. Chiamiamo $\tau(A, B)$ il tempo che la particella impiega per andare da A a B , cioè

$$\tau(A, B) = \int_0^{\tau(A, B)} dt = \int_0^{b_1} dt(x),$$

dove indichiamo con $dt(x)$ il tempo impiegato dalla particella per percorrere un tratto di curva infinitesimo, corrispondente ad una variazione delle ascisse uguale a dx , a partire dal punto $(x, q(x))$. Se $v(x) \in \mathbb{R}^2$ è la velocità istantanea della particella che si muove lungo la curva, all'istante in cui la particella si trova nel punto $(x, q(x))$ si ha $v(x) = \frac{d\ell}{dt}$, dove $d\ell$ è il valore assoluto dello spostamento infinitesimo della particella lungo la curva, i.e. $d\ell = |(1, \dot{q}(x))|dx = \sqrt{1 + \dot{q}^2(x)}dx$, e quindi

$$v(x) = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \dot{q}^2(x)}.$$

Da questa relazione ricaviamo $dt(x) = dx \frac{\sqrt{1 + \dot{q}^2(x)}}{v(x)}$. Inoltre, sappiamo che l'energia $E = \frac{1}{2}mv^2(x) - mgq(x)$ è una costante del moto e, poiché la particella all'istante iniziale si trova in quiete nel punto $(0, 0)$, sappiamo che $E = 0$. Pertanto,

$$v(x) = \sqrt{2gq(x)}.$$

Sostituendo questo valore nella formula per $\tau(A, B)$ otteniamo

$$\tau(A, B) = \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + \dot{q}^2(x)}{2gq(x)}} dx.$$

Il problema, quindi, corrisponde a minimizzare $\tau(A, B)$ rispetto a $q(x)$ nello spazio delle curve $q(x)$ che vanno da A a B , che è equivalente a minimizzare il funzionale

$$A_{0, b_1}^{\mathcal{L}}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) dx, \quad \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) := \sqrt{\frac{1 + \dot{q}^2}{2gq}}$$

sullo spazio delle curve $(x, q(x))$ passanti per i punti $(0, 0)$ e (b_1, b_2) , i.e. sullo spazio $\mathcal{M}_{0, b_1}(0, b_2)$.

2. La condizione di minimo per $\mathcal{A}_{0,b_1}^{\mathcal{L}}$ implica la condizione di stazionarietà per $\mathcal{A}_{0,b_1}^{\mathcal{L}}$ e, dalla teoria, sappiamo che quest'ultima è equivalente alle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}.$$

Questo significa che la curva che realizza il minimo è la soluzione di tali equazioni.

Calcoliamo, pertanto, le equazioni di Eulero-Lagrange:

- $\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{q}(x)}{\sqrt{2gq(x)(1+\dot{q}^2(x))}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2gq(x)(1+\dot{q}^2(x))}} \left(\frac{\ddot{q}(x)}{1+\dot{q}^2(x)} - \frac{\dot{q}^2(x)}{2q(x)} \right);$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\sqrt{1+\dot{q}^2(x)}}{2q(x)\sqrt{2gq(x)}}.$

Quindi, uguagliando le due relazioni si ottiene:

$$2q(x)\ddot{q}(x) + \dot{q}^2(x) + 1 = 0.$$

3. Rimane da far vedere che

$$q(x) = r \left(1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right) \right)$$

risolve l'equazione di Eulero-Lagrange.

Calcoliamo $\dot{q}(x)$ e $\ddot{q}(x)$ e sostituiamo nell'equazione, ricordando che $\phi := h^{-1}$ dove $h(t) := t - \sin t$:

- $\dot{q}(x) = \phi' \left(\frac{x}{r} \right) \sin \phi \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{\sin \phi \left(\frac{x}{r} \right)}{1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right)};$
- $\ddot{q}(x) = -\frac{1}{r(1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right))^2}.$

Otteniamo, quindi:

$$\begin{aligned} 2q(x)\ddot{q}(x) + \dot{q}^2(x) + 1 &= 2r \left(1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right) \right) \left(-\frac{1}{r(1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right))^2} \right) + \left(\frac{\sin \phi \left(\frac{x}{r} \right)}{1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right)} \right)^2 + 1 = \\ &= \frac{-2(1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right)) + \sin^2 \phi \left(\frac{x}{r} \right) + (1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right))^2}{(1 - \cos \phi \left(\frac{x}{r} \right))^2} = 0, \end{aligned}$$

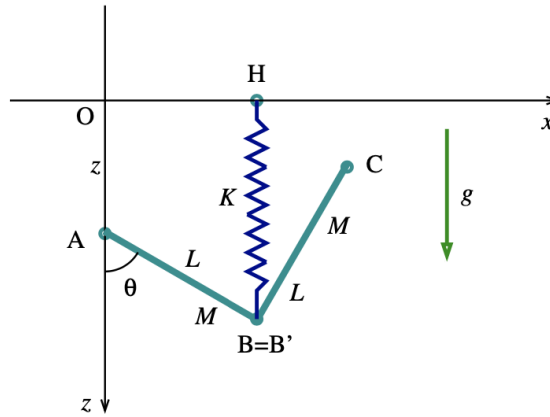
che è quello che volevamo.

Pertanto, la cicloide con cuspidi in 0 è un punto stazionario del funzionale considerato.

10 X: Lagrangian systems 2

10.1 Exercise 1

In a vertical plane with vertical descending axis Oz , moves a rigid body formed by two homogeneous bars, AB and $B'C$, of mass M and length L . Bars are welded in the extreme $B = B'$ forming a right angle (see figure below). The end point A of the first bar is constrained to move without friction along a guide on the Oz axis. The system is free to rotate around an axis perpendicular to the plane and passing through A . The elastic force $F = -KHB$, with $K \geq 0$, acts on the system, where H is the orthogonal projection of B on the axis Ox . Let g denote the value of the gravitational acceleration. Use as Lagrangian coordinates the z coordinate of A and the angle θ formed by the segment AB and the positive direction of the Oz axis.



1. Write the Lagrange function L of the system and the equations of motion;
2. determine a constant of motion;
3. find the equilibrium positions of the system and discuss their number and stability.

Solution

Let us call G and G' the center of mass of the two bars. We have

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{L}{2} \sin(\theta), & z_G &= z + \frac{L}{2} \cos(\theta), \\ x_{G'} &= L \sin(\theta) + \frac{L}{2} \cos(\theta), & z_{G'} &= z + L \cos(\theta) - \frac{L}{2} \sin(\theta), \end{aligned} \quad (302)$$

and, using that

$$I_G^{(bar)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dM = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho dx = \rho \frac{L^3}{12} = \frac{MR^2}{12}, \quad (303)$$

$$I^{(tot)} = I_G + I_{G'} = \frac{MR^2}{6}. \quad (304)$$

The kinetic energy is

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2 + \dot{x}_{G'}^2 + \dot{z}_{G'}^2) + \frac{1}{2} I^{(tot)} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M \left[2\dot{z}^2 - L(3\sin(\theta) + \cos(\theta))\dot{\theta}\dot{z} + \frac{5}{3}L^2\dot{\theta}^2 \right]; \quad (305)$$

while the potential energy is

$$U = -\frac{1}{2}K(z + L\cos(\theta))^2 + Mg\left[2z + \frac{3}{2}L\cos(\theta) - \frac{1}{2}L\sin(\theta)\right]. \quad (306)$$

The Lagrange function is

$$L = T - U, \quad (307)$$

and the Euler-Lagrange equations are

$$\begin{aligned} M\ddot{z} - \frac{ML}{2}[(3c(\theta) - s(\theta))\dot{\theta}^2 + (3s(\theta) + c(\theta))\ddot{\theta}] &= -2Mg + K(z + Lc(\theta)); \\ -\frac{ML}{2}[(3c(\theta) - s(\theta))\dot{\theta}\dot{z} + (3s(\theta) + c(\theta))\ddot{z}] + \frac{5L^2}{3}\ddot{\theta} &= -K(z + Lc(\theta))Ls(\theta) + \frac{ML}{2}g(3s(\theta) + c(\theta)) \end{aligned} \quad (308)$$

where $c(\theta) := \cos(\theta)$ and $s(\theta) := \sin(\theta)$.

Since on the body act only conservative forces the system is conservative and the energy $E = T + U$ is conserved.

The first and second derivatives of the potential energy are

$$\partial_z U = K(z + L\cos(\theta)) - 2Mg, \quad \partial_\theta U = -KL(z + L\cos(\theta))\sin(\theta) + \frac{1}{2}MgL(3\sin(\theta) + \cos(\theta)) \quad (309)$$

and

$$\partial_{zz}^2 U = K, \quad \partial_{z\theta}^2 U = -KLs(\theta), \quad \partial_{\theta\theta}^2 U = -KL(z + Lc(\theta))c(\theta) + Kl^2s^2(\theta) + \frac{MgL}{2}(3c(\theta) - s(\theta)). \quad (310)$$

From $\partial_z U = 0$ we get $z + L\cos(\theta) = \frac{2Mg}{K}$ and plugging in $\partial_\theta U = 0$ we get $\sin(\theta) = \cos(\theta)$; we have two equilibrium points

$$(z_1, \theta_1) = \left(\frac{2Mg}{K} - \frac{L}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right), \quad (z_2, \theta_2) = \left(\frac{2Mg}{K} + \frac{L}{\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{4}\right). \quad (311)$$

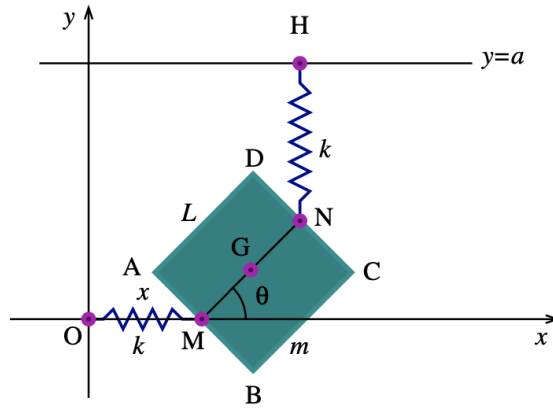
Since $\partial_{zz}^2 U > 0$ the necessary and sufficient condition to have stable equilibrium is that the determinant of Hessian matrix is positive. The determinant is

$$\det(\text{Hess}(U)) = -K^2L(z + L\cos(\theta))\cos(\theta) + \frac{MgLK}{2}(3\cos(\theta) - \sin(\theta)); \quad (312)$$

therefore we can see that (z_1, θ_1) is unstable while (z_2, θ_2) is stable.

10.2 Exercise 2

In a horizontal plane moves a rigid and homogeneous square foil $ABCD$, with side L and mass m . The midpoint M of the side AB is constrained to move without friction along a guide on the axis Ox and the foil is free to rotate around passing through M (see figure below). The active forces act on the system are $F_1 = -kOM$, with $k \geq 0$, $F_2 = -kHN$, where N midpoint of the side CD and H is the orthogonal projection of N on the straight line $y = a$ with $a \geq 0$. Use as Lagrangian coordinates the abscissa x of M and the angle θ formed by the segment MN and the positive direction of the axis Ox .



1. Write the Lagrange function L of the system and the equations of motion. Recall that the inertia momenta for a square homogeneous foil with respect to an axis passing through the center of mass is $I_G = \frac{mL^2}{6}$;
2. find the equilibrium positions of the system and discuss their number and stability in function of $\lambda = \frac{a}{L}$;
3. assuming the distance OM fixed find two constant of motion.

Solution

We have

$$x_G = x + \frac{L}{2}\cos(\theta), \quad y_G = \frac{L}{2}\sin(\theta); \quad (313)$$

therefore

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{5}{12}L^2\dot{\theta}^2 - L\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x}\right) - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(a - L\sin(\theta))^2. \quad (314)$$

The equations of motion are

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{x} - \frac{L}{2}\sin(\theta)\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\cos(\theta)\dot{\theta}^2\right) &= -kx, \\ m\left(\frac{5}{12}L^2\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin(\theta)\ddot{x}\right) &= -kL(a - L\sin(\theta))\cos(\theta). \end{aligned} \quad (315)$$

The first derivatives of the potential energy are

$$\partial_x U = kx, \quad \partial_\theta U = kL(a - L\sin(\theta))\cos(\theta) \quad (316)$$

while the second derivatives are

$$\partial_{xx}^2 = k, \quad \partial_{\theta\theta}^2 = kL^2\cos^2(\theta) - kL(a - L\sin(\theta))\sin(\theta), \quad \partial_{x\theta}^2 = 0. \quad (317)$$

There are four equilibrium positions

$$\begin{aligned}
 (x_1, \theta_1) &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\
 (x_2, \theta_2) &= \left(0, \frac{3\pi}{2}\right), \\
 (x_3, \theta_3) &= \left(0, \arcsin\left(\frac{a}{L}\right)\right), \\
 (x_4, \theta_4) &= \left(0, -\arcsin\left(\frac{a}{L}\right) + \pi\right).
 \end{aligned} \tag{318}$$

Since $\partial_{xx}^2 > 0$ the necessary and sufficient condition to have stable equilibrium is that the determinant of Hessian matrix is positive. The determinant is

$$\det(\text{Hess}(U)) = k^2 L 2 \cos^2(\theta) - k^2 L (a - L \sin(\theta)) \sin(\theta); \tag{319}$$

therefore, (x_1, θ_1) is stable if and only if $\lambda > 1$; (x_2, θ_2) is never stable; positions (x_3, θ_3) and (x_4, θ_4) are always stable.

If OM is fixed there is non potential energy of the spring; the Lagrangian does not depend on x and so

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}mL\sin(\theta)\dot{\theta} \tag{320}$$

is a constant of motion. The other one is the energy since the the system is conservative.

10.3 Esercizio 3

Un punto materiale di massa $m > 0$ è vincolato a muoversi in un piano verticale, lungo una guida di equazione $y = \frac{x^2}{\ell}$, con $\ell > 0$ (si assuma l'asse y verticale e orientato verso l'alto). Il punto è soggetto alla forza di gravità e ad una forza di richiamo elastica di costante $k > 0$ diretta verso il punto $(0, \ell)$ prodotta da una molla di lunghezza a riposo nulla.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate le ascisse dei punti.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri k e g (dove g rappresenta l'accelerazione di gravità).

Soluzione

1. Le coordinate del punto sono date da

$$q = \left(x, \frac{x^2}{\ell}\right),$$

pertanto la velocità sarà data da

$$\dot{q} = \left(\dot{x}, \frac{2x\dot{x}}{\ell}\right).$$

Sappiamo che la Lagrangiana \mathcal{L} è la differenza tra energia cinetica T ed energia potenziale V .

L'energia cinetica è

$$V = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right),$$

mentre l'energia potenziale è data dalla somma tra energia potenziale gravitazionale ed energia potenziale elastica

$$V = mg\frac{x^2}{\ell} + \frac{1}{2}k \left(x^2 + \left(\frac{x^2}{\ell} - \ell\right)^2\right).$$

Pertanto, la Lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right) - mg\frac{x^2}{\ell} - \frac{1}{2}k \left(x^2 + \left(\frac{x^2}{\ell} - \ell\right)^2\right).$$

2. Le equazioni di Eulero-Lagrange le possiamo ricavare ricordando che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}.$$

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{x} \left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right)\right) = m\ddot{x} \left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right) + 8m\dot{x}^2 \frac{x}{\ell^2};$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4m\dot{x}^2 \frac{x}{\ell^2} - 2mg\frac{x}{\ell} - kx - k \left(\frac{x^2}{\ell} - \ell\right) \frac{2x}{\ell} = 4m\dot{x}^2 \frac{x}{\ell^2} - 2x \left(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\right) - 2k\frac{x^3}{\ell^2}.$

Pertanto si ha

$$m\ddot{x} \left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right) = -4m\dot{x}^2 \frac{x}{\ell^2} - 2x \left(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\right) - 2k\frac{x^3}{\ell^2}.$$

3. Per studiare i punti di equilibrio, studiamo la derivata del potenziale:

$$V'(x) = 2mg\frac{x}{\ell} - kx + 2k\frac{x^3}{\ell^2} = x \left(\frac{2mg}{\ell} - k + 2k\frac{x^2}{\ell^2}\right).$$

Notiamo che se $k \leq \frac{2mg}{\ell}$ allora $x = 0$ è l'unico punto di equilibrio, che è stabile in quanto minimo di $V(x)$, mentre se $k > \frac{2mg}{\ell}$ allora $x = 0$ è un punto di equilibrio instabile, in quanto massimo del potenziale, mentre $x = \pm \sqrt{\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell mg}{k}}$ sono due punti di equilibrio stabili, in quanto punti di minimo del potenziale.

10.4 Esercizio 4

Due punti materiali di masse $m > 0$ e $2m > 0$ sono vincolati a muoversi in un piano verticale lungo due guide di equazione, rispettivamente, $y = x$ ed $y = h$, con $h \in \mathbb{R}$ costante (si assuma l'asse y verticale e orientato verso l'alto). I due punti sono soggetti alla forza di gravità e sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il secondo punto è inoltre collegato ad un'altra molla fissata nell'origine di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate le ascisse dei punti.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

Soluzione

1. Le coordinate dei due punti sono date da

$$q_1 = (x_1, x_1), \quad q_2 = (x_2, h),$$

pertanto le velocità saranno date da

$$\dot{q}_1 = (\dot{x}_1, \dot{x}_1), \quad \dot{q}_2 = (\dot{x}_2, 0).$$

Sappiamo che la Lagrangiana \mathcal{L} è la differenza tra energia cinetica T ed energia potenziale V .

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{q}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{q}_2|^2 = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2),$$

mentre l'energia potenziale è data dalla somma tra le energie potenziali gravitazionali e le energie potenziali elastiche dei due punti

$$V =, gx_1 + mgh + \frac{1}{2}k [(x_2^2 + h^2) + (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - h)^2].$$

Pertanto, la Lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - mgx_1 - mgh - \frac{1}{2}k [x_2^2 + h^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - h)^2].$$

2. Le equazioni di Eulero-Lagrange le possiamo ricavare ricordando che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}.$$

Pertanto:

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \Rightarrow 2m\ddot{x}_1 = -mg - k(2x_1 - x_2 - h);$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \Rightarrow 2m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1).$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 = -mg - k(2x_1 - x_2 - h) \\ 2m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1) \end{cases}.$$

3. Le configurazioni di equilibrio sono quelle tali che

$$\begin{cases} mg + k(2x_1 - x_2 - h) = 0 \\ k(2x_2 - x_1) = 0 \end{cases}.$$

Si ha quindi un'unica configurazione di equilibrio corrispondente a $(x_1, x_2) = (\frac{2}{3}(h - \frac{mg}{k}), \frac{1}{3}(h - \frac{mg}{k}))$.

Per studiarne la stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la matrice non dipende da x_1 e x_2 e che ha autovalori $\lambda_1 = k$ e $\lambda_2 = 3k$, che sono entrambi positivi. Pertanto, la matrice è definita positiva e il punto $(x_1, x_2) = (\frac{2}{3}(h - \frac{mg}{k}), \frac{1}{3}(h - \frac{mg}{k}))$ è stabile.

11 XI: Hamiltonian systems and canonical transformations

11.1 Exercise 1

Given the following lagrangian

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + 2q_1\dot{q}_2 + q_1e^{q_2} \quad (321)$$

find the hamiltonian and the Hamilton equations

Solution

Let us compute the conjugate momenta to q_1 and q_2

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 2q_1 \quad (322)$$

The hamiltonian is defined as Legendre transform of the lagrangian, where $p = (p_1, p_2)$ and similar for \dot{q} ,

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p \cdot \dot{q} - L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \dot{q}_1^2 + 2q_1\dot{q}_2 - \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - 2q_1\dot{q}_2 - q_1e^{q_2} = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2e^{q_2}. \quad (323)$$

The Hamilton equations are

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \left(p_1, -\frac{1}{2}p_2e^{q_2} \right), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \left(e^{q_2}, \frac{1}{2}p_2e^{q_2} \right). \quad (324)$$

11.2 Exercise 2

Given the following transformation

$$p = 5^{\frac{1}{b}}Q^{\frac{1}{b}}q^{-\frac{a}{b}}, \quad P = c5^{\frac{7}{b}}Q^{\frac{7}{b}}q^{5-\frac{7a}{b}}, \quad (325)$$

from variables q, Q to variables p, P . Find the parameters $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that the transformation is canonical and determine the generating function $F_4(p, P)$.

Solution

We invert the relations and we obtain

$$Q = \frac{1}{5}q^ap^b, \quad P = cq^5p^7; \quad (326)$$

we impose the fundamental Poisson bracket to be 1

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{c}{5}(7a - 5b)q^{a+4}p^{b+6} = 1 \Rightarrow a = -4, b = -6, c = \frac{5}{2}. \quad (327)$$

We have $dF_4(p, P) = -qdp + QdP$ with

$$q = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}} P^{\frac{1}{5}} p^{-\frac{7}{5}}, \quad Q = 5^{-\frac{1}{5}} 2^{-\frac{4}{5}} P^{-\frac{4}{5}} p^{-\frac{2}{5}} \quad (328)$$

Solving the equations

$$\frac{\partial F_4}{\partial p} = -q = -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}} P^{\frac{1}{5}} p^{-\frac{7}{5}}, \quad \frac{\partial F_4}{\partial P} = Q = 5^{-\frac{1}{5}} 2^{-\frac{4}{5}} P^{-\frac{4}{5}} p^{-\frac{2}{5}} \quad (329)$$

we find a possible generating function

$$F_4(p, P) = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4}{5}} P^{\frac{1}{5}} p^{-\frac{2}{5}}. \quad (330)$$

11.3 Esercizio 3

Per $q > 0$ si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2q^2} \left(1 + \left(\frac{\dot{q}}{q^2} \right)^2 \right).$$

1. Si determini l'Hamiltoniana.
2. Si determinino le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = \frac{P}{2q^2}$ e si calcolino la nuova Hamiltoniana e le nuove equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P) .
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

Soluzione

1. Data la Lagrangiana, sappiamo che

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^6} \Rightarrow \dot{q} = pq^6,$$

da cui segue che l'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}p^2q^6 - \frac{1}{2q^2}.$$

2. Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono date da

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^6 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -3p^2q^5 - \frac{1}{q^3} \end{cases}.$$

3. La trasformazione canonica generata da $F(q, P)$ è data da

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{q^2} \\ p = \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{P}{q^3} \end{cases},$$

che è ben definita e invertibile. La trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2Q}} \\ p = -P(2Q)^{3/2} \end{cases} .$$

Pertanto, l'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} - Q$$

e le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 1 \end{cases} .$$

4. Se $(q(0), p(0)) = (1, 0)$ allora $(Q(0), P(0)) = (\frac{1}{2}, 0)$. La soluzione delle equazioni del moto è data da

$$\begin{cases} P(t) = P(0) + t = t \\ Q(t) = Q(0) + \frac{P^2(t)}{2} = \frac{1}{2}(1 + t^2) \end{cases} ,$$

pertanto la soluzione nelle variabili di partenza sarà data da

$$\begin{cases} q(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ p(t) = -t(1+t^2)^{3/2} \end{cases} .$$

5. Data la Lagrangiana di partenza, l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\ddot{q} = \frac{3\dot{q}^2}{q} - q^3.$$

Se consideriamo la soluzione $q(t)$ ottenuta al punto precedente abbiamo che

$$\begin{cases} \dot{q} = -t(1+t^2)^{-(3/2)} \\ \ddot{q} = -(1+t^2)^{-(3/2)} + 3t^2(1+t^2)^{-(5/2)} \end{cases} .$$

Sostituendo le espressioni per q, \dot{q}, \ddot{q} nell'equazione di Eulero-Lagrange si ottiene la tesi.

11.4 Esercizio 4

Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = 2a \log p + \log q \\ P = -p^b q \log q \end{cases}$$

per $q, p > 0$.

1. Si determinino i valori di a, b per cui la trasformazione è canonica.
2. Si determini l'inversa della trasformazione canonica del punto precedente e si trovi una funzione generatrice di prima specie che la generi.
3. Si consideri l'Hamiltoniana $H(q, p) = \frac{1}{2}q^2 p^2 \log^2 q$. Si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$ nelle nuove coordinate, si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti e le si risolvano in corrispondenza dei dati iniziali $(Q_0 = Q(q_0, p_0), P_0 = P(q_0, p_0))$, dove $(q_0, p_0) = (e, \frac{1}{e})$. Infine, si usi la trasformazione inversa trovata al punto precedente per riesprimere la soluzione nelle variabili originali (q, p) .

Soluzione

1. Per determinare i valori di a, b per cui la trasformazione è canonica, imponiamo che le parentesi di Poisson siano pari a 1:

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = p^{b-1} ((2a - b) \log q + 2a) = 1$$

per $2a = b = 1$, per cui la trasformazione di coordinate è

$$\begin{cases} Q = \log p + \log q \\ P = -pq \log q \end{cases} .$$

2. Dalla prima delle equazioni ricaviamo $pq = e^Q$. Sostituendo nella seconda otteniamo che la trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = e^{-Pe^{-Q}} \\ p = e^{Q+Pe^{-Q}} \end{cases} .$$

Dobbiamo poi trovare una funzione generatrice $F(q, Q)$ tale che

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \end{cases} .$$

Dalla seconda equazione otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = e^Q \log q,$$

ossia

$$F(q, Q) = e^Q \log q + f(Q).$$

Applicando la prima equazione, con $f(Q) = 0$, otteniamo

$$F(q, Q) = e^Q \log q.$$

3. Utilizzando la trasformazione al punto precedente, la nuova Hamiltoniana è data da

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2}$$

e le nuove equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \end{cases} .$$

La soluzione in corrispondenza dei dati iniziali $(Q(0), P(0)) = (0, -1)$ è data da

$$\begin{cases} P(t) = P(0) = -1 \\ Q(t) = Q(0) + P(0)t = -t \end{cases} .$$

Usando la trasformazione inversa si ottiene la soluzione nelle variabili originali:

$$\begin{cases} q(t) = e^{e^t} \\ p(t) = e^{-t-e^t} \end{cases} .$$

12 XII: Revision exercises for final test

12.1 Exercise 1

Given the following transformation

$$q = \left(\frac{Q}{3}\right)^{\frac{1}{3}} p^{-\frac{2}{3}}, \quad P = Bp^{\delta - \frac{2\gamma}{3}} \left(\frac{Q}{3}\right)^{\frac{\gamma}{3}} \quad (331)$$

say for which values of the real parameters B, δ, γ the transformation is canonical and find a possible generating function $F_2(q, P)$. Given the hamiltonian of a harmonic oscillator (with mass m and elastic constant k) written in (q, p) variables write it in (Q, P) variables and write the Hamilton equations

Solution

We have

$$Q = 3q^2 p^2, \quad P = Bq^\gamma p^\delta; \quad (332)$$

imposing the fundamental Poisson bracket we have

$$3B(3\delta - 2\gamma)q^{\gamma+2}p^{\delta+1} = 1 \Rightarrow \gamma = -2, \delta = -1, B = \frac{1}{3}. \quad (333)$$

To compute $F_2(q, P)$ we need p, Q in function of q, P . We have

$$p = \frac{1}{3}q^{-2}P^{-1}, \quad Q = \frac{1}{3}q^{-1}P^{-2}, \quad (334)$$

and solving the equations

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p = \frac{1}{3}q^{-2}P^{-1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q = \frac{1}{3}q^{-1}P^{-2} \quad (335)$$

we get the possible primitive

$$F_2(q, P) = -\frac{1}{3}q^{-1}P^{-1}. \quad (336)$$

Let us invert relations 334

$$q = \frac{1}{3}Q^{-1}P^{-2}, \quad p = 3Q^2P^3; \quad (337)$$

the transformation is completely canonical and the new hamiltonian is simply

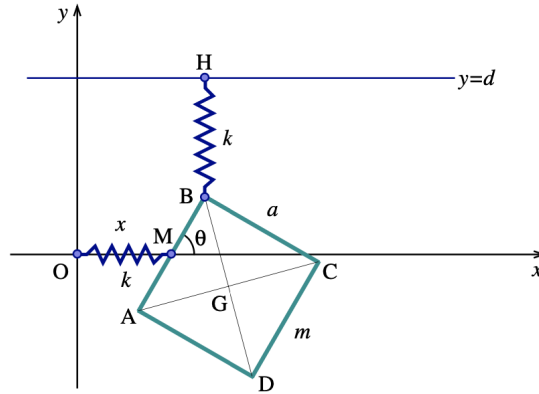
$$H(P, Q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{9Q^4P^6}{2m} + \frac{1}{18}kQ^{-2}P^{-4}. \quad (338)$$

The Hamilton equation are

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{27Q^4P^5}{m} - \frac{2k}{9}Q^{-2}P^{-5}; \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{18Q^3P^6}{m} + \frac{1}{9}Q^{-3}P^{-4}. \end{aligned} \quad (339)$$

12.2 Exercise 2

In a horizontal plane a homogeneous square guide ABCD, with side a and mass m , moves. The midpoint M of the side AB is constrained to slide without friction along the axis Ox , and the square guide is free to rotate around an axis perpendicular to the plane Oxy and passing through M (see figure below). The active forces are due to two springs ($k > 0$) and H is the orthogonal projection of N on the straight line $y = d$ with $d \geq 0$. Use the abscissa x of M and the angle θ as Lagrangian coordinates.



1. Write down the lagrangian of the system, find a conserved quantity and write the Euler-Lagrange equations;
2. find the equilibrium positions and study their stability as the parameter $\lambda = \frac{a}{d}$ varies;
3. write the conjugate momenta of the variables θ and x .

Solution

We have $x_M = x$ and $y_B = \frac{a}{2} \sin(\theta)$ so

$$x_G = x + \frac{a}{2} \sin(\theta), \quad y_G = -\frac{a}{2} \cos(\theta). \quad (340)$$

The inertial momentum of a bar with respect its center of mass can be computed as

$$I_{cm}^{(1-bar)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \rho dx = \rho \frac{2a^3}{24} = \frac{ma^2}{12} \quad (341)$$

from Hyugens-Steiner theorem we have that, for a single bar,

$$I_G^{(1-bar)} = I_{cm}^{(1-bar)} + \frac{m a^2}{4 \cdot 4}. \quad (342)$$

We have four bars and the computation is always the same; we get

$$I_G^{(square)} = 4I_{cm}^{(1-bar)} + 4 \frac{m a^2}{4 \cdot 4} = \frac{4ma^2 + 3ma^2}{12} = \frac{7}{12} ma^2. \quad (343)$$

The kinetic energy is

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_G^{(square)} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + a \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{x} + \frac{10}{12} a^2 \dot{\theta}^2 \right] \quad (344)$$

while the potential energy is

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(d - \frac{a}{2}\sin(\theta)\right)^2. \quad (345)$$

The equations of motion are

$$\begin{aligned} \frac{10}{12}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ma(\ddot{x}\cos(\theta) - \dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)) &= -k\left(d - \frac{a}{2}\sin(\theta)\right)\frac{a}{2}\cos(\theta); \\ m(\ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos(\theta) - a\dot{\theta}^2\sin(\theta)) &= -kx. \end{aligned} \quad (346)$$

A conserved quantity is the total energy $E = K + U$. The first derivative of the potential are

$$\partial_x U = kx, \quad \partial_\theta = \frac{ka}{2}\left(d - \frac{a}{2}\sin(\theta)\right)\cos(\theta), \quad (347)$$

while the second ones are

$$\partial_{xx}^2 = k, \quad \partial_{\theta\theta}^2 = \frac{ka}{2}\left(d - \frac{a}{2}\sin(\theta)\right)\cos(\theta) + \frac{ka^2}{4}\cos^2(\theta), \quad \partial_{x\theta}^2 = \partial_{\theta x}^2 = 0. \quad (348)$$

The equilibrium points are the zeros of the first potential derivatives

$$\begin{aligned} (x_1, \theta_1) &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ (x_2, \theta_2) &= \left(0, \frac{3\pi}{2}\right), \\ (x_3, \theta_3) &= \left(0, +\arcsin\left(\frac{2d}{a}\right)\right), \\ (x_4, \theta_4) &= \left(0, -\arcsin\left(\frac{2d}{a}\right) + \pi\right). \end{aligned} \quad (349)$$

Since $\partial_{xx}^2 > 0$, necessary and sufficient condition to have stability is that $\partial_{\theta\theta}^2 > 0$. For the first position this happens when $\lambda < 2$; for the second position this does not happens for any value of λ ; the last two position are stable when they exist, i.e. for $\lambda \geq 2$.

The conjugate momenta are

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m[2\dot{x} + a\cos(\theta)\dot{\theta}], \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}m\left[a\cos(\theta)\dot{x} + \frac{10}{6}a^2\dot{\theta}\right]. \quad (350)$$

12.3 Esercizio 3

Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2(x^2 + y^2) + z^2 = R^2,$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm R)$ tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e. della forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z) \cos \theta \\ \rho(z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix},$$

con $\rho(z) = \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}}$, $z \in [-R, R]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema vincolato usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta})$.

2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

3. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si determinino due grandezze conservate.

Soluzione

1. Data la parametrizzazione in coordinate cilindriche si ha che

$$\dot{\mathbf{x}} = \ell \begin{pmatrix} -\frac{\dot{z}z}{\sqrt{2(R^2 - z^2)}} \cos \theta - \dot{\theta} \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}} \sin \theta \\ -\frac{\dot{z}z}{\sqrt{2(R^2 - z^2)}} \sin \theta + \dot{\theta} \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}} \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

da cui segue che

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \dot{z}^2 \frac{2R^2 - z^2}{R^2 - z^2} + \dot{\theta}^2 \frac{R^2 - z^2}{2}.$$

Pertanto, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{z}^2 \frac{2R^2 - z^2}{R^2 - z^2} + \dot{\theta}^2 \frac{R^2 - z^2}{2} \right),$$

mentre l'energia potenziale, pari alla somma tra energia potenziale gravitazionale ed energia potenziale elastica, è data da

$$V = mgz + \frac{1}{2} k(3R^2 + z^2).$$

La Lagrangiana del sistema nelle variabili $z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}$ è data quindi da

$$\mathcal{L}(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}) := T - V = \frac{1}{2} m \left(\dot{z}^2 \frac{2R^2 - z^2}{R^2 - z^2} + \dot{\theta}^2 \frac{R^2 - z^2}{2} \right) - mgz - \frac{1}{2} k(3R^2 + z^2).$$

2. Calcoliamo le equazioni di Eulero-Lagrange:

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Rightarrow m \ddot{z} \frac{2R^2 - z^2}{R^2 - z^2} = -\frac{m \dot{z}^2 z R^2}{(R^2 - z^2)^2} - \frac{1}{2} m z \dot{\theta}^2 - mg - kz;$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Rightarrow m \ddot{\theta} \frac{R^2 - z^2}{2} - m z \dot{z} \dot{\theta} = 0.$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono date quindi da

$$\begin{cases} m \ddot{z} \frac{2R^2 - z^2}{R^2 - z^2} = -\frac{m \dot{z}^2 z R^2}{(R^2 - z^2)^2} - \frac{1}{2} m z \dot{\theta}^2 - mg - kz \\ m \ddot{\theta} \frac{R^2 - z^2}{2} - m z \dot{z} \dot{\theta} = 0 \end{cases}.$$

3. La seconda delle equazioni ci dice che θ è una variabile ciclica e che

$$A := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta} \frac{R^2 - z^2}{2}$$

è una costante del moto.

Vediamo che anche l'energia meccanica

$$E = T + V = \frac{1}{2}m \left(\dot{z}^2 \frac{2R^2 - z^2}{R^2 - z^2} + \dot{\theta}^2 \frac{R^2 - z^2}{2} \right) + mgz + \frac{1}{2}k(3R^2 + z^2)$$

è una quantità conservata:

$$\frac{d}{dt}E = m\dot{z}\ddot{z} \frac{2R^2 - z^2}{R^2 - z^2} + \frac{mz\dot{z}^3 R^2}{(R^2 - z^2)^2} - \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 z\dot{z} + mg\dot{z} + kz\dot{z} = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza segue in modo diretto dalle equazioni di Eulero-Lagrange.

12.4 Esercizio 4

Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3}.$$

1. Si determini l'Hamiltoniana.
2. Si determinino le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = \frac{Pq^3}{3}$ e si calcolino la nuova Hamiltoniana e le nuove equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P) .
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

Soluzione

1. Data la Lagrangiana, sappiamo che

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}q^4 \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{q^4},$$

da cui segue che l'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H(q, p) = [p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q})]_{\dot{q}=\frac{p}{q^4}} = \frac{p^2}{q^4} + \frac{q^3}{3}.$$

2. Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono date da

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{q^4} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{2p^2}{q^5} - q^2 \end{cases}.$$

3. La trasformazione canonica generata da $F(q, P)$ è data da

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{q^3}{3} \\ p = \frac{\partial F}{\partial q} = Pq^2 \end{cases} ,$$

che è ben definita e invertibile. La trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = (3Q)^{1/3} \\ p = P(3Q)^{2/3} \end{cases} .$$

Pertanto, l'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} + Q$$

e le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -1 \end{cases} .$$

4. Se $(q(0), p(0)) = (1, 0)$ allora $(Q(0), P(0)) = (\frac{1}{3}, 0)$. La soluzione delle equazioni del moto è data da

$$\begin{cases} P(t) = P(0) - t = -t \\ Q(t) = Q(0) - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{3} - \frac{t^2}{2} \end{cases} ,$$

pertanto la soluzione nelle variabili di partenza sarà data da

$$\begin{cases} q(t) = \left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{1/3} \\ p(t) = -t \left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{2/3} \end{cases} .$$

5. Data la Lagrangiana di partenza, l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\ddot{q}q^4 + 2\dot{q}^2q^3 + q^2 = 0.$$

Se consideriamo la soluzione $q(t)$ ottenuta al punto precedente abbiamo che

$$\begin{cases} \dot{q} = -t \left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{-2/3} \\ \ddot{q} = - \left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{-2/3} - 2t^2 \left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{-5/3} \end{cases} .$$

Sostituendo le espressioni per q, \dot{q}, \ddot{q} nell'equazione di Eulero-Lagrange si ottiene la tesi.