FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2022/2023

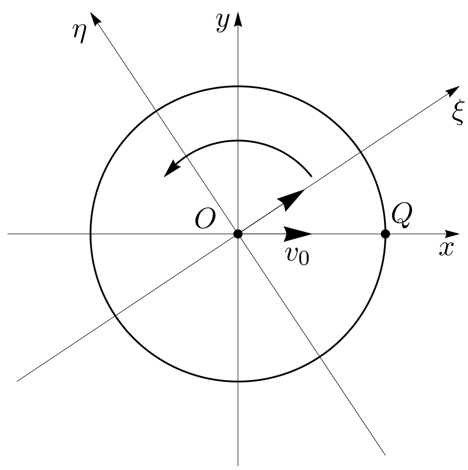
Primo appello (21-06-2023)

<u>Esercizio 1.</u> [6+3] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 - \log(\alpha + x^2), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per $\alpha = 1$, si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Per $\alpha = 1$, si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Per $\alpha = 1$, si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. [Si risponda alle stesse domande al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un omino si muove su una giostra circolare di raggio $R = 1$ e, partendo dal centro, vuole raggiungere un punto fisso Q posto a distanza R dal centro della giostra. L'omino si dirige verso Q in linea retta con velocità costante v_0. Si scelga un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$, in cui O sia il centro della giostra, l'asse z sia ortogonale al piano della giostra e il punto Q si trovi sull'asse x (cfr. la figura).



1. Si calcoli, in funzione di v_0, il tempo necessario perché l'omino raggiunga il punto Q se la giostra rimane ferma.
2. Se invece la giostra, nell'istante in cui l'omino si avvia, inizia a girare in verso antiorario con velocità angolare ω, si indichi con $K = O\xi\eta\zeta$ il sistema di riferimento mobile solidale con la giostra. Nel sistema di riferimento K, l'omino si muove in linea retta lungo l'asse ξ con velocità costante v_0: si determini la traiettoria descritta dall'omino nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si calcoli per quali valori di v_0 l'omino raggiunge effettivamente il punto fisso Q quando arriva sul bordo della giostra e si calcoli il tempo t_0 in cui questo avviene.
4. Nel sistema di riferimento fisso κ il punto Q è fermo: si descriva come si muove tale punto nel sistema di riferimento K.
5. [Si descriva il moto del punto Q nel sistema di riferimento solidale con l'omino].

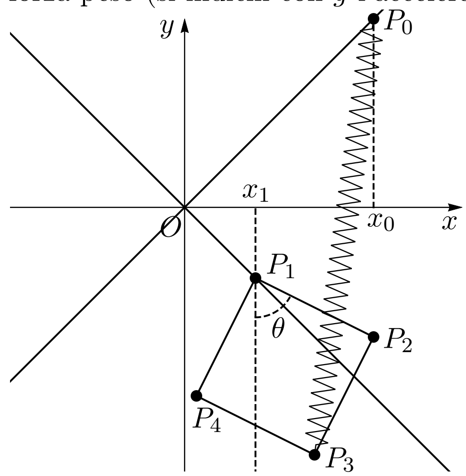
<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente:

- il punto P_1 è collegato all'origine O da un'asta inestensibile di lunghezza $\ell = 1$ e massa trascurabile;
- il punto P_2 scorre lungo l'asse x;
- una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k collega P_1 al punto $Q = (0, -2)$;
- una seconda molla, sempre di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k, collega P_1 a P_2;
- sul sistema agisce inoltre la forza peso (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'angolo che il segmento OP_1 forma con l'asse y discendente e l'ascissa x del punto P_2.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
3. [Si discuta come cambiano le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità nel caso in cui il piano verticale ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da 5 punti materiali P_0, P_1, P_2, P_3 e P_4, di cui il primo ha massa $m_0 = 2$, mentre gli altri quattro hanno tutti massa $m = 1$ e sono disposti ai 4 vertici di un quadrato indeformabile di massa trascurabile e di lato $\ell = 1$. I punti si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente:

- il punto P_0 scorre lungo la retta di equazione $y = x$;
- il punto P_1 scorre lungo la retta di equazione $y = -x$;
- il punto P_3, che occupa l'estremo opposto della diagonale del quadrato rispetto a P_1, è collegato al punto P_0 da una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k,
- sul sistema agisce inoltre la forza peso (si indichi con g l'accelerazione di gravità).



1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa x_0 del punto P_0, l'ascissa x_1 del punto P_1 e l'angolo θ che il lato del quadrato che collega i punti P_1 e P_2 forma con l'asse y discendente (cfr. la figura).
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità. Può essere utile utilizzare le identità trigonometriche, valide per $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$,
$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}.$$
3. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_0.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+2+2] Si consideri la trasformazione di coordinate
$$Q = \frac{p\,\mathrm{e}^{-q^2}}{1+2q^2}, \qquad P = \frac{p^2\,\mathrm{e}^{-2q^2}}{(1+2q^2)^2} - q\,\mathrm{e}^{q^2},$$

1. Si dimostri che è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
2. Data l'hamiltoniana
$$H(q,p) = \frac{p^2\,\mathrm{e}^{-2q^2}}{(1+2q^2)^2} - 2q\,\mathrm{e}^{q^2},$$
si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P).
3. [Si usi il risultato del punto precedente per trovare la soluzione nelle equazioni di Hamilton nelle variabili (q, p) con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 1)$.]
4. [Si verificichi che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.]