FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2022/2023

Secondo appello (10-07-2023)

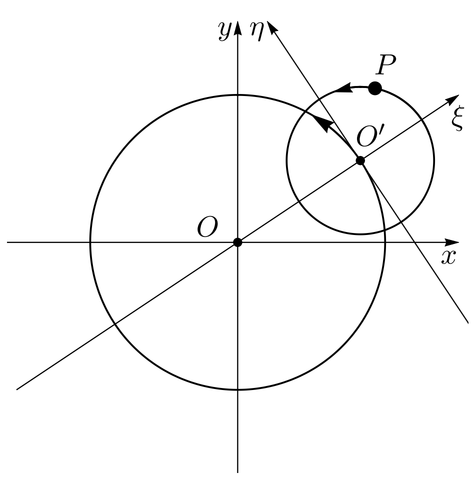
<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x^2 - 1|}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
5. [Si dimostri che la traiettoria con condizioni iniziali $(0, \sqrt{2})$ è periodica e se ne calcoli il periodo in forma di integrale definito.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Sia $\kappa = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso e sia $\mathcal{C}$ la circonferenza che in κ ha equazione $x^2 + y^2 = 4$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile, tale che l'origine O' ruota lungo la circonferenza $\mathcal{C}$ con velocità angolare ω, l'asse ξ si mantiene ortogonale alla circonferenza nel verso uscente e l'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z. Un punto materiale P di massa m si muove, nel sistema di riferimento K, lungo una circonferenza $\mathcal{C}_0$ di raggio $r = 1$ che ha centro in O', con velocità angolare costante ω_0 (cfr. la figura). All'istante iniziale, nel sistema di riferimento κ, O' e P hanno coordinate $O' = (2, 0)$ e $P = (3, 0)$, rispettivamente.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$, che fa passare dal sistema K al sistema κ, come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ di P nel sistema di riferimento mobile.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ di P nel sistema di riferimento fisso κ.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P.
5. [Si determini che relazione deve sussistere tra ω_0 e ω perché il moto di P sia periodico anche nel sistema di riferimento fisso κ.]



<u>Esercizio 3.</u> [6+3] Un'asta omogenea di lunghezza $\ell = 1$ e massa M si muove nel piano verticale xy nel modo seguente:

- l'estremo A dell'asta scorre lungo l'asse x, mentre l'altro estremo B scorre lungo l'asse y;
- due molle, entrambe di lunghezza trascurabile e costante elastica k, collegano una l'estremo A al punto $Q = (1, 0)$, l'altra l'estremo B al punto $O = (0, 0)$;
- l'asta è soggetta alla forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema (come coordinata lagrangiana si può utilizzare l'angolo θ che l'asta forma con l'asse y) e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si discuta l'esistenza e la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
3. [Si studi il comportamento del sistema se si rimuove la molla che collega l'estremo B dell'asta al punto O.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito un punto materiale P di massa m, vincolato a muoversi in un piano verticale – che identificheremo con il piano xy – nel modo seguente:

- il piano xy ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω,
- il punto P scorre lungo il profilo di equazione $y = x(x^2 - 1)$ ed è soggetto alla forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità.
4. [Si calcoli la reazione la forza vincolare che si deve opporre alla forza di Coriolis per impedire che il punto P abbandoni il piano rotante.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+2+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = q_2\big(q_1 p_1 - q_2 p_2\big), \\ Q_2 = q_1 + \dfrac{q_1 q_2 p_2}{q_1 p_1 - q_2 p_2}, \\ P_1 = \dfrac{p_2}{q_1 p_1 - q_2 p_2}, \\ P_2 = \dfrac{q_1 p_1 - q_2 p_2}{q_1}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F = F(q_1, q_2, P_1, P_2)$, e si verifichi esplicitamente che F soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F / \partial q_i \partial P_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
3. Data l'hamiltoniana
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2q_1^2}\left((q_1 p_1 - q_2 p_2)^2 + p_2^2\right) + q_1 q_2,$$
si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nel sistema di coordinate (Q_1, Q_2, P_1, P_2).
4. [Si risolvano le equazioni del moto nel sistema di coordinate (Q_1, Q_2, P_1, P_2) in corrispondenza del dato iniziale, nelle coordinate originali, $(q_1(0), p_1(0), q_2(0), p_2(0)) = (1, 1, 0, 0)$.]
5. [Si trovi, in corrispondenza dello stesso dato iniziale del punto precedente, la soluzione delle equazioni di Hamilton nelle variabili (q_1, q_2, p_1, p_2).]