FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2022-2023

Terzo appello (04-09-2023)

<u>ESERCIZIO 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = |x| - \log|x - x^2|.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
5. [Si trovi per quali valori di energia non esistono traiettorie in $\mathbb{R}_+$.]

<u>ESERCIZIO 2.</u> [6+2] Sia $\kappa = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso e sia $\mathcal{C}$ una guida curvilinea che, in κ, è descritta dall'equazione $z = h\,(\mathrm{e}^{-x} - 1)$, con $h > 0$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile tale che

- l'origine O' scorre lungo la guida $\mathcal{C}$ in modo tale che la sua coordinata x, in ogni istante t, assuma il valore $x_{O'}(t) = t$,
- l'asse ξ si mantiene tangente alla guida $\mathcal{C}$, mentre l'asse η si mantiene parallelo all'asse y.

Un sasso P di massa m viene lanciato all'istante $t = 0$ dal punto $O = O'$ nel verso dell'asse x positivo con velocità v_0 e si muove in κ sotto l'azione della forza di gravità, diretta nel verso dell'asse z negativo (sia g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$, che fa passare dal sistema K al sistema κ, come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ di P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ di P nel sistema di riferimento mobile K.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P.
5. [Si dimostri che scegliendo opportunamente v_0 il sasso ricade su O' in un tempo finito.]

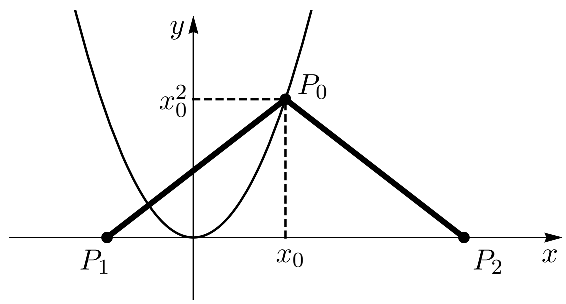
<u>ESERCIZIO 3.</u> [6+3] Si consideri un sistema meccanico costituito da tre punti materiali P_1, P_2 e P_3, di masse rispettivamente m_1, m_2 e m_3. Il punto P_1 è vincolato a muoversi su un piano orizzontale fissato π, mentre P_2 e P_3 sono vincolati a scorrere lungo una retta verticale r, anch'essa fissata. Due molle, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collegano tra loro P_1 a P_2 e P_2 a P_3, rispettivamente. Sul sistema agisce la forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si verifichi che esiste un sistema di coordinate in cui il sistema ammette una variabile ciclica, si determini il corrispondente momento conservato, e si calcoli la lagrangiana ridotta.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema ridotto e se ne discuta la stabilità.
4. Si studi la stabilità di eventuali configurazioni di equilibrio del sistema.
5. [Si studi se esiste ancora una variabile ciclica nel caso in cui il piano π oscilli verticalmente con frequenza costante ω, e si trovi in caso il momento conservato corrispondente.]

Esercizio 4. [6+3] Un sistema meccanico è costituito tre punti materiali P_0, P_1 e P_2, tutti di massa m, vincolati a muoversi nel piano verticale xy nel modo seguente:

- il punto P_0 scorre lungo il profilo di equazione $y = x^2$;
- i punti P_1 e P_2 si muovono lungo l'asse x e interagiscono tramite una forza repulsiva inversamente proporzionale alla loro distanza (si indichi con α l'intensità della forza);
- entrambi P_1 e P_2 sono collegati a P_0 tramite un'asta di massa trascurabile e lunghezza $\ell = 1$;
- i tre punti sono soggetti alla forza di gravità (sia indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la lagrangiana del sistema (si usi come coordinata lagrangiana l'ascissa x_0 di P_0).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si discuta come cambia la discussione se le due aste hanno massa $M > 0$.]



Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \log(1+q^2), \\ P = \dfrac{1+q^2}{2q} p. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$, e si verifichi esplicitamente che $F = F(q, P)$ soddisfa la condizione $\partial^2 F/\partial q \partial P \neq 0$ in $\mathcal{D}$.
3. Data la lagrangiana
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \frac{4q^2}{(1+q^2)^2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \log^2(1+q^2),$$
si determini la corrispondente hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$.
4. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P).
5. Si risolvano le equazioni del moto nel sistema di coordinate (Q, P) in corrispondenza del dato iniziale, nelle coordinate lagrangiane originali, $(q(0), \dot{q}(0)) = (1, 1)$.
6. [Si trovi, in corrispondenza dello stesso dato iniziale del punto precedente, la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange nelle variabili q.]