FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2022/2023

Quarto appello (15-01-2024)

ESERCIZIO 1. [6+2] Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \sqrt[3]{x^7(x^2-1)^8}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi.
4. [Si discuta se esistano moti non definiti globalmente nel tempo.]

ESERCIZIO 2. [6+2] Sia $\kappa = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso e sia D un disco di raggio $R = 2$ che si muove nel piano xy nel modo seguente: il disco ruota in senso antiorario con velocità costante ω_0 intorno al suo centro O', che oscilla lungo l'asse x con legge oraria $x_{O'}(t) = A\sin t$, con ampiezza A costante. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile solidale con il disco, con l'asse ζ parallelo all'asse z e l'asse ξ coincidente con l'asse x all'istante $t = 0$. Un punto materiale P di massa m si muove, nel sistema di riferimento K, lungo la spirale

$$\xi(t) = t\cos t, \qquad \eta(t) = t\sin t, \qquad \zeta(t) = 0.$$

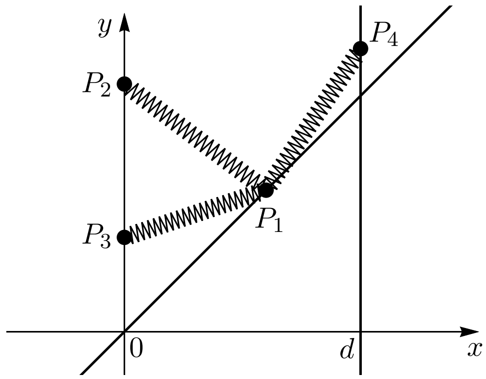
1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$, che fa passare dal sistema K al sistema κ, come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ di P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P.
4. [Si determini come deve essere fissata A in funzione di ω_0 perché il punto P si trovi in O quando riattraversa l'asse x per la terza volta.]

ESERCIZIO 3. [6+2] Due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, si muovono lungo la superficie del paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$, soggetti alla forza di gravità, che agisce nella direzione dell'asse z negativo, e alla forza elastica di una molla di lunghezza trascurabile che li connette (siano g l'accelerazione di gravità e k la costante elastica della molla). Il paraboloide inoltre ruota intorno all'asse z con velocità angolare costante ω.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema utilizzando coordinate cilindriche.
2. Si dimostri che il sistema ammette un sistema di coordinate in cui esiste una variabile ciclica, e si utilizzi il metodo di Routh per calcolare il momento conservato corrispondente e la lagrangiana ridotta.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.
4. [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.]

Esercizio 4. [6+2] Quattro punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti e quattro di massa m, si muovono in un piano verticale, che si può identificare con il piano xy, nel modo seguente:

- il punto P_1 scorre lungo la retta di equazione $y = x$;
- i punti P_2 e P_3 scorrono entrambi lungo la retta verticale $x = 0$;
- il punto P_4 scorre lungo la retta verticale $x = d$, con $d \in \mathbb{R}$ costante;
- il punto P_1 è collegato a ciascuno degli altri tre punti da una molla di lunghezza trascurabile e costante elastica k.



1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.
3. Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
4. Si determini il valore a cui si deve fissare la costante d perchè esista un configurazione di equilibrio in cui il punto P_1 sia equidistante dalle due rette verticali.
5. [Si risponda all'ultima domanda nel caso in cui si elimini il punto P_3.]

Esercizio 5. [6+1+1] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q = \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{p}\right) e^{q^2}, \qquad P = \frac{p}{q} e^{-q^2}.$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica, trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$ corrispondente alla lagrangiana
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} q^2 e^{2q^2} \dot{q}^2,$$
e si ricavi quindi l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ del sistema nelle variabili (Q, P).
4. Si determini, nel nuovo sistema di coordinate (Q, P), la soluzione corrispondente al dato iniziale $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 1$.
5. [Si costruisca la trasformazione inversa della trasformazione data.]
6. [Si scriva la soluzione del punto precedente nel sistema di coordinate originale (q, p).]