FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2022/2023

Quinto appello del CdL in Fisica (15-02-2024)
Secondo appello Straordinario del CdL in Matematica (15-02-2024)

<u>Esercizio 1.</u> [6+1] Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{-x^2}\left(1 - x^2\right)^2 .$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi.
4. [Si discuta se esistano moti non definiti globalmente nel tempo.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+3] Sia $\kappa = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso, e sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile tale che O' scorre lungo la guida di equazione $y = e^{-x}$ con legge oraria $x_{O'}(t) = t$, mentre l'asse ξ e l'asse ζ si mantengono il primo tangente alla guida nel verso delle x positive e il secondo parallelo all'asse z. Un punto materiale P si muove lungo l'asse η con velocità costante v_0 e, all'istante iniziale $t = 0$, si trova in O'.

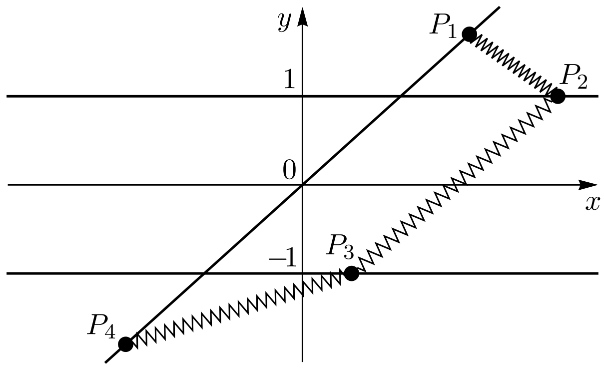
1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$, che fa passare dal sistema K al sistema κ, come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ di P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P.
4. [Un punto materiale P' scorre lungo la guida $y = 2\cosh x = e^x + e^{-x}$ con legge oraria $x_{P'}(t) = t$. Si determini il valore che deve assumere v_0 perché il punto P collida con il punto P' e si calcoli il tempo t_0 in cui questo accade.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+1] Due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, si muovono lungo la superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$. I due punti sono soggetti alla forza di gravità, che agisce nella direzione dell'asse z negativo, e sono inoltre collegati tra loro ed entrambi a un punto posto lungo l'asse del cilindro da molle di lunghezza trascurabile (siano g l'accelerazione di gravità e k la costante elastica delle tre molle).

1. Si scriva la lagrangiana del sistema utilizzando coordinate cilindriche.
2. Si dimostri che il sistema ammette un sistema di coordinate in cui esiste una variabile ciclica, e si utilizzi il metodo di Routh per calcolare il momento conservato corrispondente e la lagrangiana ridotta.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema ridotto e se ne discuta la stabilità.
4. [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio del sistema originario.]

Esercizio 4. [6+4] Quattro punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti e quattro di massa m, si muovono in un piano verticale, che si può identificare con il piano xy, nel modo seguente:

- i punti P_1 e P_4 scorrono lungo la retta di equazione $y = x$;
- i punti P_2 e P_3 scorrono lungo le rette orizzontali $y = 1$ e $y = -1$, rispettivamente;
- tre molle di lunghezza trascurabile e costante elastica k collegano P_1 con P_2, P_2 con P_3, e P_3 con P_4, rispettivamente;
- tutti punti sono soggetti alla forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità).



1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.
3. Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
4. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_1.]

Esercizio 5. [6+1] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = q_1^2 + \log q_2, \\ Q_2 = q_2^2 + \log q_1, \\ P_1 = \dfrac{2q_1q_2^2p_1 - q_2p_2}{4q_1^2q_2^2 - 1}, \\ P_2 = \dfrac{2q_1^2q_2p_2 - q_1p_1}{4q_1^2q_2^2 - 1}, \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, P_1, P_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare in $\mathcal{D}$.
4. Si consideri l'hamltoniana
$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{(4q_1^2q_2^2 - 1)^2}\left(q_2^2\,(2q_1q_2p_1 - p_2)^2 + q_1^2\,(2q_1q_2p_2 - p_1)^2\right)$$
e si calcoli la soluzione delle equazioni di Hamilton nelle variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2) in corrispondenza del dato iniziale $(q_1(0), q_2(0), p_1(0), p_2(0)) = (1, 1, 1, 0)$.]
5. [Si verifichi che $\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2)$ è una forma quadratica definita positiva nei momenti p_1, p_2.]