FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2022/2023

Appello straordinario (07-11-2023)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^{8/3} e^x.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi.
4. [Si discuta se esistano moti non definiti globalmente nel tempo.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Sia A una matrice $n \times n$, e siano λ un autovalore di A e $v \in \mathbb{R}^n$ l'autovettore associato a λ.

1. Si mostri che $\mathrm{e}^{At} v = \mathrm{e}^{\lambda t} v$.
2. Si utilizzi il risultato del punto precedente e la linearità dell'operatore e^{At} per risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. [Si utilizzi un metodo differente per trovare la soluzione.]

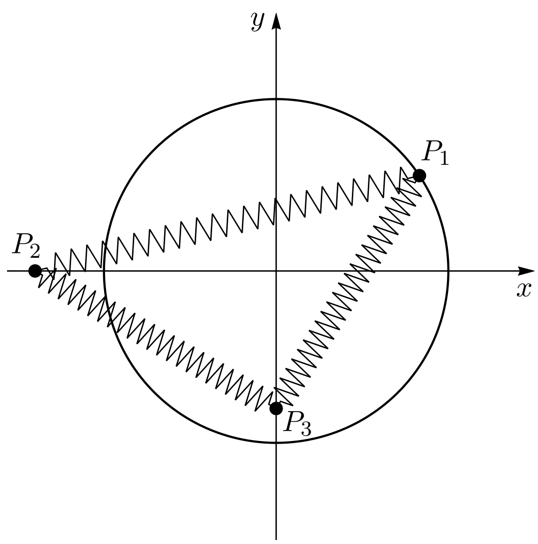
<u>Esercizio 3.</u> [6+3] Due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, si muovono nel piano verticale xy lungo i profili di equazione $x = y^2$ e $x = -y^2$, rispettivamente. I due punti sono connessi sotto da una molla di lunghezza a riposo trascurabile, e sono inoltre soggetti alla forza di gravità. Siano g l'accelerazione di gravità e k la costante elastica della molla.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema (come coordinate lagrangiane si possono utilizzare le coordinate y_1 e y_2 dei due punti).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si discuta l'esistenza e la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
4. [Si studi il comportamento del sistema nel caso in cui il piano verticale ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+3] Si consideri il sistema meccanico costituito da tre punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa m, che si muovono in un piano orizzontale, nel modo seguente:

- il punto P_1 si muove lungo una circonferenza di raggio $r = 1$;
- i punti P_2 e P_3 scorrono lungo due rette ortogonali, passanti per il centro della circonferenza;
- i tre punti sono collegati a due a due da tre molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si discuta come cambia lo scenario se il piano è verticale.]



<u>Esercizio 5.</u> [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \alpha \log p + \log q, \\ P = \beta q p^{\gamma} \log q. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si determinino i valori dei parametri α, β e γ per cui la trasformazione è simplettica.
3. Per i valori dei parametri trovati al punto precedente, data l'hamiltoniana
$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2} p^2 q^2 \log^2 q,$$
si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q,P)$ nelle variabili (Q,P).
4. Si determini, nel nuovo sistema di coordinate (Q,P), la soluzione corrispondente al dato iniziale $q(0) = \mathrm{e}$, $p(0) = 1/\mathrm{e}$.
5. [Si scriva la soluzione del punto precedente nel sistema di coordinate originale (q,p).]