# FM210 - Meccanica Analitica

## Anno Accademico 2023/2023

(Simulazione della prima prova di esonero)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Sia $n \geq 2$ e si considerino le soluzioni del sistema lineare

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad \dot{x}_k = x_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, n.$$

1. Mostrare che le soluzioni divergono al più polinomialmente nel tempo $t$.
2. Calcolare esplicitamente le soluzioni.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = \frac{x^2 - 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

Si scelga l'energia potenziale $V(x)$ in modo tale che valga $V(0) = -1/2$

1. Verificare che esistono posizioni iniziali $\bar{x}$ tali che ad energia fissata $E = -1/5$ il moto corrispondente sia periodico
2. Stimare il periodo delle traiettorie al punto precedenti.
3. Determinare eventuali punti di equilibrio del sistema dinamico associato al sistema meccanico e discuterne la stabilità.
4. Dopo aver tracciato un grafico qualitativo dell'energia potenziale, studiare le curve di livello nel piano delle fasi.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2} + 1.$$

1. Studiare il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Determinare i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Discutere qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
5. Verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica per $E = 1$, scriverne il periodo come integrale definito e darne una stima.

<u>ESERCIZIO 4.</u> Si considerino due punti materiali di massa $m_1 = m_2 = 1$, che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{\rho} - \log \rho, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti Sia $L$ il modulo del momento angolare $L$, e si assuma che sia $L > 0$. Al variare del coefficiente $\alpha$, si risponda alle seguenti domande.

1. Descrivere il moto mettendosi nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libertà nelle variabili polari $(\rho, \theta)$.
2. Determinare eventuali punti di equilibrio del sistema dinamico associato al moto della variabile $\rho$ e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
4. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
5. Discutere le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.

<u>Esercizio 5.</u> Dato un un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ che ruoti in senso orario intorno all'asse $\zeta$, che si mantiene parallelo all'azze $z$, con velocità angolare costante $\omega_0$, mentre l'origine $O'$ si muove lungo la curva $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ le cui componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = -\omega\gamma_2 \\ \dot{\gamma}_2 = \omega\gamma_1 \\ \dot{\gamma}_3 = 0 \end{cases}$$

All'istante iniziale $O'$ occupa la posizione $\mathbf{q}_{O'} = (1, 0, 0)$.

1. Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione $C$ con una rotazione $B$.
2. Determinare il moto nei sistemi di riferimento $K$ e $\kappa$.
3. Determinare la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto $P$.
4. Calcolare il valore della forza di Coriolis e della forza centrifuga che agiscono su $P$.