Corsi di laurea in Matematica e in Fisica – Anno Accademico 2022/2023
FM210 – Meccanica Analitica

Sommario

Il seguente file rappresenta l'esercitazione 1 LC del 24/02/2023. Il file presenta una raccolta di 5 esercizi sui sistemi di equazioni differenziali lineari.

Autore: Livia Corsi.
Revisione a cura di Valerio Brunetti.

Indice

1 Testi degli esercizi

Esercizio 1. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y + z \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

con condizioni iniziale $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 1)$*. Se ne trovi la soluzione.*

Clicca qui per la soluzione.

Esercizio 2. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

con dato iniziale $x(0) = (1, 2, 1)$*. Se ne determini la soluzione. Verificare in particolare che il moto descritto dal sistema è planare e descrive il piano su cui si svolge.*

Clicca qui per la soluzione.

Esercizio 3. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 1)$*. Se ne determini la soluzione.*

Clicca qui per la soluzione.

Esercizio 4. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi una soluzione al variare del parametro reale α.

Clicca qui per la soluzione.

Esercizio 5. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia S l'insieme delle soluzioni del problema*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

al variare del dato iniziale.

1. *Verificare che S è un sottospazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*
2. *Mostrare che la derivazione d/dt è un operatore lineare su S i cui sottospazi corrispondono agli autospazi di A.*

Clicca qui per la soluzione.

2 Soluzioni

Esercizio 1

Esercizio 1. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y + z \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

con condizioni iniziale $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 1)$. Se ne trovi la soluzione.

Svolgimento. Consideriamo intanto con lo scrivere il sistema nella forma

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = (0, 1, 1)$ e osserviamo che possiamo scrivere A come

$$A = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che $N^3 = (0)_{ij}$ e che $[\mathbb{1}, N] = 0$ dato che una delle due è l'identità. Ma allora

$$\exp(At) = \exp(It)\left(I + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2\right) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2e^t}{2} \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = te^t\left(1+\dfrac{t}{2}\right) \\ y(t) = e^t(1+t) \\ z(t) = e^t. \end{cases}$$

□

Torna ai testi degli esercizi.

Esercizio 2

Esercizio 2. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

con dato iniziale $x(0) = (1, 2, 1)$. Se ne determini la soluzione. Verificare in particolare che il moto descritto dal sistema è planare e descrive il piano su cui si svolge.

Svolgimento 1. Calcoliamo lo spettro della matrice A, cioè

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ -2 & -\lambda & -4 \\ -7 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Applicando la regola di Sarrus, si ottiene

$$-\lambda(-4+\lambda^2) - 24 - 28\lambda + 12(2-\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2+36\right),$$

che ha come soluzione

$$\mathcal{S} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda = 0, \ \lambda = 6i, \ \lambda = -6i\}.$$

Risolviamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o anche

$$\begin{pmatrix} x+2z \\ x+2z \\ -7x+3y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oppure

$$\begin{cases} x = -2z \\ 14z + 3y - 2z = 0, \end{cases}$$

conseguentemente

$$\begin{cases} x = -2z \\ 3y + 12z = 0, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = -4z. \end{cases}$$

Il precedente sistema ha ∞^1 soluzioni nella forma

$$(x, y, z) = (-2z, -4z, z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Un possibile autovettore per λ_1 è

$$v_1 = (2, 4, -1).$$

Risolviamo

$$\begin{pmatrix} 2-6i & 0 & 4 \\ -2 & -6i & -4 \\ -7 & 3 & -2-6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando il metodo della riduzione a gradini il precedente sistema può essere riscritto come

$$\begin{pmatrix} (2-6i) & 0 & 4 \\ 0 & 6i-2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{cases} (2-6i)x + 4z = 0 \\ (6i-2)y + 4z = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{2-6i} z \\ y = -\dfrac{4}{6i-2} z, \end{cases}$$

in altri termini

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5} i \\ y = z\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} i\right). \end{cases}$$

Il precedente sistema ha ∞^1 soluzioni nella forma

$$(x, y, z) = \left(\left(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right) z, \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right) z, z\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Imponiamo

$$\left(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right) z = 2,$$

da cui

$$z = -1 + 3i.$$

Un possibile autovettore per λ_2 è

$$v_2 = \left(\left(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right)(-1+3i), \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)(-1+3i), -1+3i\right) = (2, -2, -1+3i).$$

Introduciamo la matrice[1]

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & \Re v_2 & \Im v_2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della precedente matrice è

$$\det K = 3 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 3(-4-8) = -36.$$

[1] Con la notazione $\Re v_2$ e $\Im v_2$ si intende rispettivamente la parte reale e immaginaria dell'autovettore v_2.

Calcoliamo i complementi algebrici per K. Abbiamo dunque

$$a_{1,1} = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -6;$$

$$a_{1,2} = -\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -12;$$

$$a_{1,3} = \det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -4 - 2 = -6;$$

$$a_{2,1} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 6;$$

$$a_{2,3} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0;$$

$$a_{3,1} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$a_{3,2} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$a_{3,3} = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = -4 - 8 = -12.$$

Dunque, la matrice inversa di K è

$$K^{-1} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}^T =$$

$$= -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avvalendoci di quanto ottenuto la matrice A può essere riscritta come

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Re\lambda_2 & \Im\lambda_2 \\ 0 & -\Im\lambda_2 & \Re\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definiamo

$$B := 6\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(6t) & \sin(6t) \\ 0 & -\sin(6t) & \cos(6t) \end{pmatrix}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{aligned}
x(t) &= k e^{Bt} k^{-1} x(0) = \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(6t) & \sin(6t) \\ 0 & -\sin(6t) & \cos(6t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(6t) & \sin(6t) \\ 0 & -\sin(6t) & \cos(6t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2-2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(6t) & \sin(6t) \\ 0 & -\sin(6t) & \cos(6t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(6t) \\ \cos(6t) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + 2\sin(6t) \\ 4 - 2\sin(6t) \\ 1 - \sin(6t) + 3\cos(6t) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \sin(6t) \\ 2 - \sin(6t) \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\sin(6t) - 3\cos(6t)) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \sin(6t) \\ y(t) = 2 - \sin(6t) \\ z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(6t) - \frac{1}{2}\sin(6t). \end{cases}$$

che è la soluzione di (1.1).

□

Svolgimento 2. Osserviamo che $m_a(0) = m_g(0)$, $m_a(6i) = m_g(6i)$ e $m_a(-6i) = m_g(-6i)$. Quindi la matrice A è diagonalizzabile. Pertanto vale[2]

$$e^{\Delta t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{6it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6it} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Calcoliamo l'autovettore v_1 relativo all'autovalore 0. Abbiamo dunque

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[2] La matrice Δ è la matrice diagonale, ovvero la matrice avente lungo la diagonale principale gli autovalori della matrice A.

da cui, risolvendo il sistema, si ottengono ∞^1 soluzioni della forma $x\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)$, con $x \in \mathbb{R}$; ad esempio, si può prendere $v_1 = (2, 4, -1)$.
Calcoliamo l'autovettore v_2 relativo all'autovalore $6i$. Procedendo analogamente a prima, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{pmatrix} 2-6i & 0 & 4 \\ -2 & -6i & -4 \\ -7 & 3 & -2-6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che ha ∞^1 soluzioni della forma $x\left(1, -1, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$, con $x \in \mathbb{R}$; ad esempio, si può prendere $v_2 = (2, -2, -1+3i)$. Inoltre, l'autovettore relativo all'autovalore $-6i$ è $v_3 = \overline{v}_2 = (2, -2, -1-3i)$.
Abbiamo dunque

$$e^{At}x(0) = Se^{\Delta t}S^{-1}x(0), \tag{2.2}$$

dove

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -1 & -1+3i & -1-3i \end{pmatrix}$$

e

$$S^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2-i & -1 & -2i \\ 2+i & -1 & 2i \end{pmatrix}.$$

Sostituendo $e^{\Delta t}$ (definito in (2.1)) in (2.2), si ottiene

$$\begin{aligned}
e^{At}x(0) &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -1 & -1+3i & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{6it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2-i & -1 & -2i \\ 2+i & -1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -1 & -1+3i & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{6it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3i \\ 3i \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -1 & -1+3i & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3ie^{6it} \\ 3ie^{-6it} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6ie^{-6it} - 6ie^{6it} + 12 \\ -6ie^{-6it} + 6ie^{6it} + 24 \\ (9-3i)e^{-6it} + (9+3i)e^{6it} - 6 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-6it} - e^{6it}}{2i} + 1 \\[2ex] -\dfrac{e^{6it} - e^{-6it}}{2i} + 2 \\[2ex] \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{e^{6it} + e^{-6it}}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{6it} - e^{-6it}}{2i}\right) - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \sin(6t) \\[2ex] 2 - \sin(6t) \\[2ex] -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\cos(6t) - \dfrac{1}{2}\sin(6t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \sin(6t) \\ \\ y(t) = 2 - \sin(6t) \\ \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\cos(6t) - \dfrac{1}{2}\sin(6t) \end{cases}$$

che è la soluzione di (1.1).

In particolare osserviamo che nella base degli autovettori possiamo scrivere il sistema nella forma

$$\dot{x} = \bar{S}x$$

in cui si vede chiaramente che il moto è planare e si svolge su un piano (affine) parallelo al piano (vettoriale) descritto da $\{\varepsilon_1 = 0\}$, dove con ε_1 indichiamo la prima componente di un vettore x rispetto alla base degli autovettori, che scritto nelle coordinate di partenza è $\{x_1 + x_2 = 0\}$. Il piano affinché corrispondente dipende dal dato iniziale; in particolare, poiché $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 2$ avremo che il piano del moto è $\{x_1 + x_2 = 3\}$. □

Torna ai testi degli esercizi.

Esercizio 3

Esercizio 3. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 1)$*. Se ne determini la soluzione.*

Svolgimento. Innanzitutto il sistema nella forma

$$\dot{\xi} = A\varepsilon, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $\xi(0) = (1, 1)$. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = -(2 - \lambda)\lambda + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

e dunque lo spettro di A è $\Sigma(A) = \{1 + i, 1 - i\}$. L'autospazio (generalizzato) $E^*(1 \pm i)$ è dato da

$$\begin{cases} (1 \mp i)x_1 + 2x_2 = 0 \\ \\ -x_1 - (1 \pm i)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \{x_1 = -(1 \pm i)x_2\}$$

quindi

$$E^*(1 \pm i) = \{(-(1 \pm i)t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$$

da cui troviamo i vettori coniugati

$$\varphi = (-1 - i, 1), \qquad \bar{\varphi} = (-1 + i, 1)$$

che scriviamo nella forma $(-1, 1) \pm i(-1, 0)$. Perciò avremo

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poiché $A = Q^{-1}SQ$ allora

$$\exp(At) = Q^{-1}\exp(St)Q$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t (\cos t + \sin t) & 2e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t (\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$

quindi la soluzione con dato iniziale $(1, 1)$ sarà

$$\begin{cases} x(t) = e^t(\cos t + 3\sin t) \\ y(t) = e^t(\cos t - 2\sin t). \end{cases}$$

$\square$

Torna ai testi degli esercizi.

Esercizio 4

Esercizio 4. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi una soluzione al variare del parametro reale α.

Svolgimento. Cominciamo con il distinguere il caso $\alpha = 0$ dal caso $\alpha \neq 0$. Infatti se $\alpha = 0$ possiamo scrivere immediatamente la matrice A come:

$$A = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $[\mathbb{1}, N] = 0$ ed $N^2 = (0)_{ij}$. Ma allora

$$\exp(At) = \exp(\mathbb{1}t) + (\mathbb{1}Nt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -te^t & e^t \end{pmatrix}$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$\boxed{x(t) = \begin{pmatrix} x_{01}e^t \\ -x_{01}te^t + x_{02}e^t \end{pmatrix}.}$$

Se invece $\alpha \neq 0$ allora il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\alpha) = \det(A - \lambda 1) = (1 - \lambda)^2 + \alpha$$

e quindi lo spettro dell'operatore è dato da $\Sigma(A) = \{1 + \sqrt{-\alpha}, 1 - \sqrt{-\alpha}\}$. Consideriamo quindi $\alpha < 0$, poniamo $\omega = \sqrt{-a}$ e calcoliamo gli autospazi; $E^*(1 + \omega)$ è dato da

$$\begin{cases} -\omega x_1 - \omega^2 x_2 = 0 \\ -x_1 - \omega x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(1 + \omega) = \{(-\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Analogamente si verifica che

$$E^*(1 - \omega) = \{(\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$$

perciò troviamo che una base di autovettori è data da

$$u = (-\omega, 1), \qquad v = (\omega, 1)$$

e quindi

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1+\omega \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} \begin{pmatrix} -\omega & \omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che $A = Q^{-1}\bar{S}Q$ e quindi

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1} \exp\left(\tilde{S}t\right) Q \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{(1+\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(1+\omega)t} \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t}) & \frac{\omega e^t}{2}(e^{-\omega t} - e^{\omega t}) \\ \frac{e^t}{2\omega}(e^{-\omega t} - e^{\omega t}) & \frac{e^t}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dunque la soluzione generale sarà

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t})x_{01} + \frac{\omega e^t}{2}(e^{-\omega t} - e^{\omega t}x_0 2) \\ \frac{e^t}{2\omega}(e^{-\omega t} - e^{\omega t})x_{01} + \frac{e^t}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t})x_{02} \end{pmatrix}.$$

Infine nel caso $\alpha > 0$ se poniamo $\omega = i\sqrt{\alpha}$ possiamo procedere esattamente come nel caso $\alpha < 0$ la soluzione sarà però espressa in termini di numeri complessi. D'altra parte nominiamo che

$$\frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2} = \cos\left(\sqrt{\alpha}t\right) \qquad \frac{e^{-\omega t} - e^{\omega t}}{2i} = \sin\left(\sqrt{\alpha}t\right)$$

e quindi

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{01}e^t \cos\left(\sqrt{\alpha}t\right) + \sqrt{\alpha}x_{02}e^t \sin\left(\sqrt{\alpha}t\right) \\ -\frac{x_{01}}{\sqrt{\alpha}}e^t \sin\left(\sqrt{\alpha}t\right) + x_{02}e^t \cos\left(\sqrt{\alpha}t\right) \end{pmatrix}.$$

□

Torna ai testi degli esercizi.

Esercizio 5

Esercizio 5. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia S l'insieme delle soluzioni del problema*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

al variare del dato iniziale.

1. *Verificare che S è un sottospazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*
2. *Mostrare che la derivazione d/dt è un operatore lineare su S i cui sottospazi corrispondono agli autospazi di A.*

Svolgimento. Punto 1. Innanzitutto scriviamo

$$S = \{x(t) = \exp(At)x_0 : x_0 \in \mathbb{R}^n\}.$$

Certamente $S \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; siano quindi $x(t), y(t) \in S$. Allora

$$x(t) + y(t) = \exp(At)x_0 + \exp(At)y_0 = \exp(At)(x_0 + y_0)$$

ovvero $x(t) + y(t) \in S$. Inoltre $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda x(t) = \lambda \exp(At)x_0 = \exp(At)\lambda x_0$ ovvero $\lambda x(t) \in S$ e quindi S è un sottospazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Infine se consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S \\ x_0 &\longmapsto \exp(At)x_0 \end{aligned}$$

notiamo immediatamente che è suriettiva e $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \varphi(x_0) = 0\} = \{0\}$ perciò φ è anche iniettiva, inoltre

$$\varphi(ax_0 + by_0) = \exp(At)(ax_0 + by_0) = a\varphi(x_0) + a\varphi(y_0)$$

perciò si tratta di un isomorfismo di spazi vettoriali.

Punto 2. Innanzitutto osserviamo che certamente la derivata è un'applicazione lineare da S a $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Inoltre la derivata è un operatore su S, ossia se $x(t) \in S$ allora $[dx/dt] \coloneqq \dot{x}(t) \in S$. Infatti poiché $\dot{x}(t) = A\exp(At)x_0$ avremo che

$$\ddot{x} = A^2 \exp(At)x_0 = A\dot{x}$$

e quindi $\dot{x} \in S$. Mostriamo che se $x(t) = \exp(At)x_0 \in S$ è autovettore della derivata allora $s_0 \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di A. Infatti x è autovettore di $[d/dt]$ se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $[dx/dt] = \lambda x$. D'altra parte $[dx/dt] = Ax$ è quindi x è autovettore se e solo se $\lambda x = Ax$, e ciò è possibile se e solo se $\lambda \exp(At)x_0 = A\exp(At)x_0$. Ora se $[A, \exp(At)] = 0$, allora $\lambda \exp(At)x_0 = A\exp(At)x_0$ se e solo se $\exp(At)\lambda x_0 = \exp(At)Ax_0$ e questo è vero se e solo se $\lambda x_0 = Ax_0$ ovvero se e solo se x_0 è autovettore di A. Rimane dunque da mostrare che $[A, \exp(At)] = 0$.

$$\begin{aligned} A\exp(At) &= A\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \\ &= A \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^t}{k!} \\ &= \lim_{n\to\infty} A \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^t}{k!} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^t}{k!} \right) A \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right) A \\ &= \exp(At)A. \end{aligned}$$

□

Torna ai testi degli esercizi.

Riferimenti bibliografici

[1] Guido Gentile, Introduzione ai sistemi dinamici - Volume 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni, Springer, Milano, 2021;

[2] Guido Gentile, Introduzione ai sistemi dinamici - Volume 2. Formalismo lagrangiano e hamiltoniano, Springer, Milano, 2022.