

FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Prima prova di esonero (18-04-2023)

ESERCIZIO 1. [6+3] Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si verifichi che $AB = -2B$ e si usi il risultato per dimostrare per induzione che

$$A^k = A - \frac{1}{3} \left(2 + (-2)^k \right) B, \quad k \geq 1.$$

2. Si usi il risultato al punto 1 per calcolare e^{At} , per $t \in \mathbb{R}$, e quindi risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = y, \end{cases}$$

in corrispondenza del dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, 0, 0)$.

3. [Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A , e si usi il risultato per ricalcolare l'esponenziale di At , per $t \in \mathbb{R}$.]

ESERCIZIO 2. [6+3] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^3(x+1)e^{-\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per $\alpha = 4$, si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Per $\alpha = 4$, si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Per $\alpha = 4$, si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi (x, \dot{x}) .
4. [Si risponda alle stesse domande al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

ESERCIZIO 3. [6+1] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \arctan x.$$

1. Si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi (x, \dot{x}) .
4. Si dimostri che esistono esattamente 5 orbite non periodiche.

5. [Si dimostri che la traiettoria con dati iniziali

$$(x(0), \dot{x}(0)) = \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}\pi - 5 + \log 2} \right)$$

è definita globalmente nel tempo e se ne discuta l'andamento asintotico per $t \rightarrow \pm\infty$.]

Esercizio 4. [6+2] Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) + \frac{1}{1+\rho}$$

Sia L il modulo del momento angolare, e si assuma che sia $L > 0$. Al variare di L , si risponda alle seguenti domande.

1. Si scrivano l'equazione del moto per la variabile ρ e per la variabile θ .
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile ρ e se ne discuta la stabilità.
4. Si studino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
5. Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
6. Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
7. [Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia $L = 0$.]

Esercizio 5. [6+3] Si consideri una piattaforma circolare di raggio R che, in un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, ruota intorno all'asse z con velocità angolare costante ω . Un omino è seduto in un punto Q sul bordo della piattaforma. Si scelga un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$, solidale con la piattaforma, tale che O' coincida con Q , l'asse ξ sia diretto lungo la direzione radiale uscente e l'asse ζ sia parallelo all'asse z del sistema fisso. All'istante $t = 0$, il punto Q si trova lungo l'asse x positivo e un altro omino, collocato in corrispondenza del punto O , lancia un sasso P verso l'omino in Q con velocità $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$. Il sasso è sottoposto all'azione della forza di gravità; si indichi con g l'accelerazione di gravità.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B .
2. Si determini il moto $\mathbf{q}(t)$ del sasso P nel sistema di riferimento fisso κ .
3. Si determini il moto $\mathbf{Q}(t)$ del sasso P nel sistema di riferimento mobile K .
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del sasso P .
5. Si calcoli il valore della forza di Coriolis e della forza centrifuga che agiscono sul sasso P nel sistema di riferimento mobile K .
6. [Si determini come devono essere fissate le componenti v_x e v_z della velocità \mathbf{v} , in termini di R , ω e g , perché il sasso venga preso dall'omino in O' (o viceversa, se l'omino è disattento) nel momento in cui ricade a terra.]

La prova di esonero si considera superata se si raggiungono almeno 18 punti senza considerare le domande facoltative (tra parentesi quadre).