

# FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2022/2023

Recupero della prima prova di esonero (21-06-2023)

ESERCIZIO 1. [6+2+2] Si consideri in  $\mathbb{R}^3$  il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di  $A$ .
2. Si usi il risultato al punto 1 per calcolare l'esponenziale di  $At$ , per  $t \in \mathbb{R}$ .
3. Si utilizzi il risultato al punto 2 per trovare la soluzione del sistema di equazioni con dato iniziale  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (1, 0, 0)$ .
4. [Si trovi un insieme positivamente invariante non banale per il sistema dinamico descritto dal sistema di equazioni.]
5. [Si trovi la soluzione con il dato iniziale al punto 3 utilizzando un metodo alternativo che non passi per il calcolo dell'esponenziale della matrice  $At$ ]

ESERCIZIO 2. [6+3] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 - \log(\alpha + x^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per  $\alpha = 1$ , si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
2. Per  $\alpha = 1$ , si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Per  $\alpha = 1$ , si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi  $(x, \dot{x})$ .
4. [Si risponda alle stesse domande al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .]

ESERCIZIO 3. [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{(x^4 - 1)^2}.$$

1. Si studi di il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si studino le curve dei livello dell'energia totale del sistema.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi  $(x, \dot{x})$ .
5. Si dimostri che esistono traiettorie illimitate.
6. [Si discuta se le traiettorie illimitate divergono in un tempo finito o infinito.]

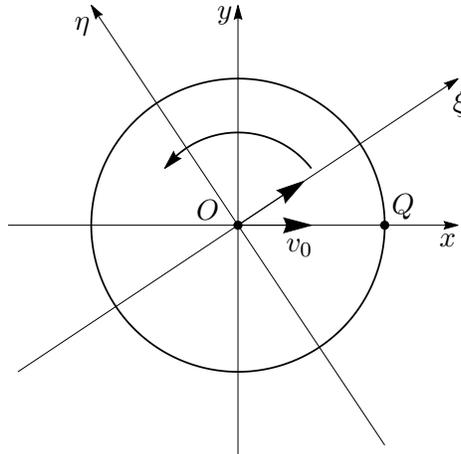
ESERCIZIO 4. [6+2+2] Un punto materiale di massa  $\mu$  è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = k\rho^2 + \alpha\rho^6,$$

dove  $k > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Sia  $L$  il modulo del momento angolare, e si assuma che sia  $L > 0$ .

1. Si scrivano l'equazione del moto per la variabile  $\rho$  e per la variabile  $\theta$ .
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile  $\rho$  e se ne discuta la stabilità.
4. Si studino qualitativamente le orbite nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
5. Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
6. [Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia  $L = 0$ .]
7. [Si consideri, per  $L \neq 0$ , in particolare il caso  $\alpha = 0$  e si discuta cosa succede di speciale in tale caso rispetto al caso  $\alpha > 0$ .]

ESERCIZIO 5. [6+3] Un omino si muove su una giostra circolare di raggio  $R = 1$  e, partendo dal centro, vuole raggiungere un punto fisso  $Q$  posto a distanza  $R$  dal centro della giostra. L'omino si dirige verso il punto  $Q$  in linea retta con velocità costante  $v_0$ . Si scelga un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$ , in cui  $O$  sia il centro della giostra, l'asse  $z$  sia ortogonale al piano della giostra e il punto  $Q$  si trovi sull'asse  $x$  (cfr. la figura).



1. Si calcoli, in funzione di  $v_0$ , il tempo necessario perché l'omino raggiunga il punto  $Q$  se la giostra rimane ferma.
2. Se invece la giostra, nell'istante in cui l'omino si avvia, inizia a girare in verso antiorario con velocità angolare  $\omega$ , si indichi con  $K = O\xi\eta\zeta$  il sistema di riferimento mobile solidale con la giostra. Nel sistema di riferimento  $K$ , l'omino si muove in linea retta lungo l'asse  $\xi$  con velocità costante  $v_0$ : si determini la traiettoria descritta dall'omino nel sistema di riferimento fisso  $\kappa$ .
3. Si calcoli per quali valori di  $v_0$  l'omino raggiunge effettivamente il punto fisso  $Q$  quando arriva sul bordo della giostra e si calcoli il tempo  $t_0$  in cui questo avviene.
4. Nel sistema di riferimento fisso  $\kappa$  il punto  $Q$  è fermo: si descriva come si muove tale punto nel sistema di riferimento  $K$ .
5. [Si descriva il moto del punto  $Q$  nel sistema di riferimento solidale con l'omino].