FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2022/2023

Seconda prova di esonero (08-06-2023)

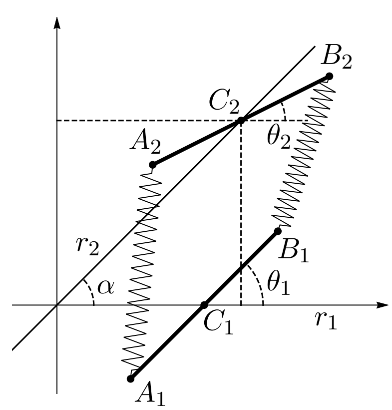
<u>Esercizio 2.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da 3 punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa m, che si muovono in un piano verticale, che identificheremo con il piano xy, nel modo seguente:

- il punto P_1 scorre lungo l'asse x;
- il punto P_2 scorre lungo l'asse y;
- il punto P_3 scorre lungo il profilo di equazione $y = x^2$ ed è collegato ai punti P_1 e P_2 tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile;
- sul sistema agisce inoltre la forza peso (si indichi con g l'accelerazione di gravità);

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le ascisse x_1 e x_3 dei punti P_1 e P_3 e l'ordinata y_2 del punto P_2.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
3. [Si risponda alle stesse domande nel caso in cui il piano verticale ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.]

<u>Esercizio 1.</u> [6+2+2] Un sistema meccanico è costituito da 2 aste omogenee, entrambe di lunghezza ℓ e massa m, che si muovono in un piano verticale, che identificheremo con il piano xy, nel modo seguente:

- il centro di massa C_1 della prima asta scorre lungo una retta orizzontale r_1, mentre il centro di massa C_2 della seconda scorre lungo una retta crescente r_2 che forma un angolo $\alpha = \pi/4$ con la retta r_1;
- le due aste sono libere di ruotare, nel piano verticale, intorno ai rispettivi centri di massa;
- indicando con A_1 e B_1 gli estremi della prima asta e con A_2 e B_2 quelli della seconda, due molle, entrambe di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k, collegano una i punti A_1 e A_2, l'altra i punti B_1 e B_2;
- sul sistema agisce inoltre la forza peso (si indichi con g l'accelerazione di gravità).



1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le ascisse x_1 e x_2 dei centri di massa C_1 e C_2 delle due aste, e gli angoli θ_1 e θ_2 che esse formano rispetto all'asse x.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
3. Si trovi un sistema di coordinate in cui una variabile è ciclica e si calcoli il momento conservato corrispondente.
4. [Si ricavi la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh.]
5. [Si determinino le configurazioni di equilibrio della lagrangian ridotta e se discuta la stabilità.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da un disco omogeneo di raggio $r = 1$ e massa $M = 3$ e da un punto materiale P di massa $m = 2$, vincolati a muoversi nel piano xy nel modo seguente:

- il disco rotola senza strisciare all'interno di una circonferenza che ha centro O nell'origine e raggio $R = 3$, mentre il punto P si muove lungo la circonferenza stessa;
- una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k collega il punto P al centro di massa C del disco;
- sul sistema agisce inoltre la forza peso (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane gli angoli che i segmenti OC e OP formano con l'asse y discendente.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
3. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+2] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \frac{q^2 \dot{q}^2}{(1 + q^2)^2}.$$

1. Si scrivano l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$ associata e le equazioni di Hamilton corrispondenti.
2. Si determini il dominio della la trasformazione di coordinate

$$Q = \log(1 + q^2) - \frac{2q}{(1 + q^2)p}, \qquad P = \frac{(1 + q^2)p}{2q},$$

   e si dimostri che è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P).
4. [Si usi il risultato del punto precedente per trovare la soluzione $q(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con dati iniziali $(q(0), \dot{q}(0)) = (1, 1)$.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+2+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = q_1 + \frac{q_1^3}{3}, \qquad Q_2 = q_2 - \frac{q_1^3}{3}, \qquad P_1 = \frac{p_1 + q_1^2 p_2}{1 + q_1^2}, \qquad P_2 = p_2$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, P_1, P_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F / \partial q_i \partial P_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{(1 + q_1^2)^2} + \left(1 + \frac{q_1^4}{(1 + q_1^2)^2}\right) p_2^2 + \frac{2 q_1^2 p_1 p_2}{(1 + q_1^2)^2} + \left(q_2 - \frac{q_1^3}{3}\right)^2,$$

   si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nelle nuove variabili.
5. Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana data e si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle nuove variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2) al variare dei dati iniziali $(Q_1(0), Q_2(0), P_1(0), P_2(0))$.
6. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili originarie in corrispondenza dei dati iniziali $q_1(0) = p_1(0) = 0$, $q_2(0) = p_2(0) = 1$.]
7. [Si verifichi che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali.]