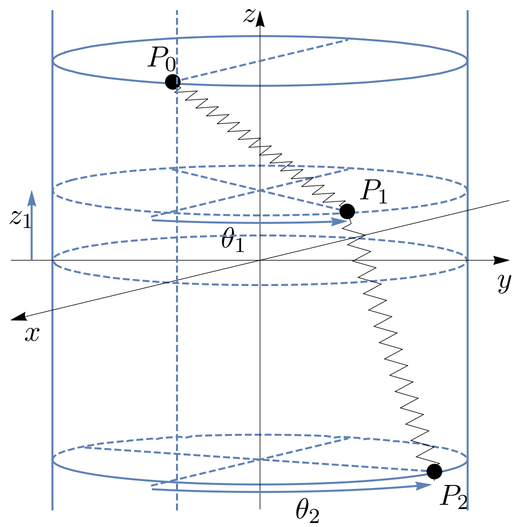
FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2022/2023

(Simulazione della seconda prova di esonero)

<u>Esercizio 1.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da 3 punti P_0, P_1 e P_2 di massa m vincolati a muoversi sulla superficie di un cilindro circolare retto di raggio $r = 1$. Si scelga un sistema di riferimento $Oxyz$, in cui l'asse z sia diretto lungo l'asse del cilindro: il punto P_0 è fisso e si trova a quota $z = 1$, il punto P_2 si muove lungo la circonferenza posta a quota $z = -1$, mentre il punto P_1 non ha ulteriori vincoli. Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano il punto P_1 ai due punti P_0 e P_2. I punti sono inoltre sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse z; sia g l'accelerazione di gravità.



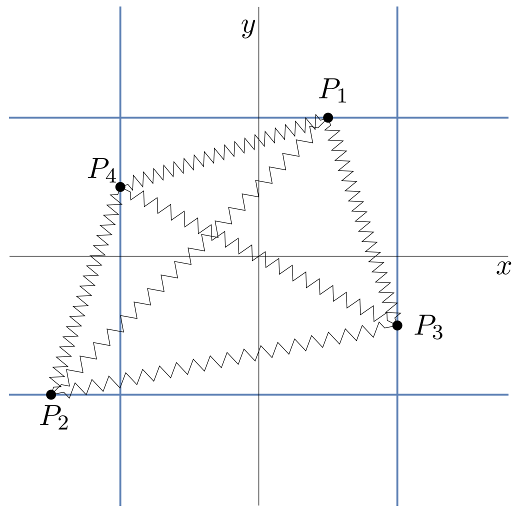
1. Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane la coordinata z_1 di P_1 lungo l'asse z e gli angoli θ_1 e θ_2 che i punti P_1 e P_2 formano rispetto al punto P_0 (cfr. la figura).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si verifichi che, se il punto P_2 viene fissato nella configurazione $\theta_2 = 0$, il sistema si disaccoppia in due sistemi unidimensionali e si discutano qualitativamente i due moti.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1$, disposti agli estremi di un'asta di lunghezza $\ell = 2$ e massa trascurabile. I due punti sono vincolati a muoversi in un piano verticale. Inoltre due molle, di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano P_1 a O_1 e P_2 a O_2, dove O_1 e O_2 sono due punti fissi posti alla stessa quota e distanti $d = 2$ l'uno dall'altro. Si indichi con g l'accelerazione di gravità.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema – può essere conveniente scegliere un sistema di coordinate (x, y) in cui O_1 e O_2 sono posti lungo l'asse x e utilizzare come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x_0, y_0) del centro di massa C del sistema e l'angolo θ che l'asta forma rispetto all'asse x.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
4. Si discuta cosa succede se l'asta è omogenea e ha massa M non nulla.

ESERCIZIO 3. [6+3] Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, vincolati a muoversi in un piano verticale, che identificheremo con il piano xy, il primo lungo la retta $y = 1$, il secondo lungo la retta $y = -1$, il terzo lungo la retta $x = 1$ e il quarto lungo la retta $x = -1$. I quattro punti sono collegati l'uno con l'altro da molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre essi sono sottoposti alla forza di gravità; sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.
4. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_1.]



ESERCIZIO 4. [6+2] Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$Q = \frac{(1-qp)^2}{q^2 p}, \qquad P = \frac{q^2 p}{1-qp}.$$

1. Si dimostri che è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si dimostri che $q^2 p = QP^2$ e si utilizzi il risultato per esprimere q in termini di Q e P.
4. Si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data, esplicitando anche p in funzione di Q e P.
5. [Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q,p) = q^2 p\,(1-qp)^{-1}$, e si determini esplicitamente la soluzione con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 2)$.]

ESERCIZIO 5. [6+3] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = p_1 - p_2 + 2q_1 q_2 - q_2^2, \\ Q_2 = 2p_2 - p_1 - 4q_1 q_2 + q_2^2, \\ P_1 = -2q_1 - q_2, \\ P_2 = -q_1 - q_2. \end{cases}$$

1. Si trovi una funzione generatrice di prima specie $F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$.
2. Si verifichi esplicitamente che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial Q_j$ è non singolare.
3. Si discuta se sia possibile trovare una funzione generatrice di seconda specie e, in caso di risposta affermativa, la si determini.
4. [Si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.]