Tutorato 10
FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)
Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
LEZIONI: Guido Gentile
ESERCITAZIONI: Livia Corsi
TUTORATO: Federico Manzoni, Michela Policella

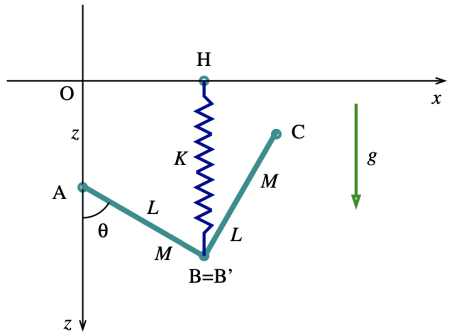
16/05/2023

Sistemi Lagrangiani

Esercizio 1. Un punto materiale di massa $m > 0$ è vincolato a muoversi in un piano verticale, lungo una guida di equazione $y = \frac{x^2}{\ell}$, con $\ell > 0$ (si assuma l'asse y verticale e orientato verso l'alto). Il punto è soggetto alla forza di gravità e ad una forza di richiamo elastica di costante $k > 0$ diretta verso il punto $(0, \ell)$ prodotta da una molla di lunghezza a riposo nulla.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate le ascisse dei punti.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametri k e g (dove g rappresenta l'accelerazione di gravità).

Esercizio 2. A rigid body formed by two homogeneous bars, AB and $B'C$, both of mass M and lenght L, moves in a vertical plane with vertical descending axis Oz. The bars are welded in the extreme $B = B'$ forming a right angle (see figure below). The end point A of the first bar is constrained to move without friction along a guide on the Oz axis. The system is free to rotate around an axis perpendicular to the plane and passing through A. The elastic force $F = -KHB$, with $K \geq 0$, acts on the system , where H is the orthogonal projection of B on the axis Ox. Let g denote the value of the gravitational acceleration. Use as Lagrangian coordinates the z coordinate of A and the angle θ formed by the segment AB and the positive direction of the Oz axis.

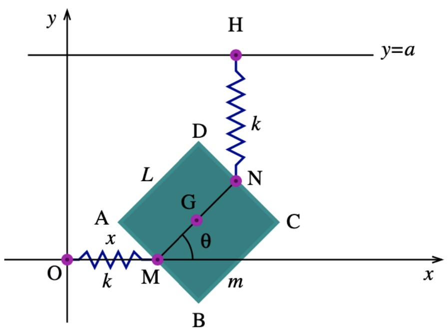


1. Write the Lagrangian L of the system and the equations of motion;
2. determine a constant of motion;
3. find the equilibrium positions of the system and discuss their number and stability.

Esercizio 3. Due punti materiali di masse $m > 0$ e $2m > 0$ sono vincolati a muoversi in un piano verticale lungo due guide di equazione, rispettivamente, $y = x$ ed $y = h$, con $h \in \mathbb{R}$ costante (si assuma l'asse y verticale e orientato verso l'alto). I due punti sono soggetti alla forza di gravità e sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il secondo punto è inoltre collegato ad un'altra molla fissata nell'origine di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate le ascisse dei punti.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 4. A rigid homogeneous square foil $ABCD$, with side L and mass m moves in a horizontal plane. The midpoint M of the side AB is constrained to move without friction around an axis orthogonal to the plane passing through M (see figure below). The active forces are $F_1 = -kOM$, with $k \geq 0$, $F_2 = -kHN$, where N midpoint of the side CD and H is the orthogonal projection of N on the straight line $y = a$ with $a \geq 0$. Use as Lagrangian coordinates the abscissa x of M and the angle θ formed by the segment MN and the positive direction of the axis Ox.



1. Write the Lagrangian L of the system and the equations of motion. Recall that the inertia momenta for a square homogeneous foil with respect to an axis passing through the center of mass is $I_G = \frac{mL^2}{6}$;

2. find the equilibrium positions of the system and discuss their number and stability in terms of $\lambda = \frac{a}{L}$;

3. assuming the distance OM to be fixed, find two constants of motion.

Soluzioni

Esercizio 1. 1. Le coordinate del punto sono date da

$$q = \left(x, \frac{x^2}{\ell}\right),$$

pertanto la velocità sarà data da

$$\dot{q} = \left(\dot{x}, \frac{2x\dot{x}}{\ell}\right).$$

Sappiamo che la Lagrangiana $\mathcal{L}$ è la differenza tra energia cinetica T ed energia potenziale V.

L'energia cinetica è

$$V = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right),$$

mentre l'energia potenziale è data dalla somma tra energia potenziale gravitazionale ed energia potenziale elastica

$$V = mg\frac{x^2}{\ell} + \frac{1}{2}k\left(x^2 + \left(\frac{x^2}{\ell} - \ell\right)^2\right).$$

Pertanto, la Lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right) - mg\frac{x^2}{\ell} - \frac{1}{2}k\left(x^2 + \left(\frac{x^2}{\ell} - \ell\right)^2\right).$$

2. Le equazioni di Eulero-Lagrange le possiamo ricavare ricordando che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}.$$

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\left(1 + \frac{4x^2}{\ell}\right)\right) = m\ddot{x}\left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right) + 8m\dot{x}^2\frac{x}{\ell^2}$;
- $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 4m\dot{x}^2\frac{x}{\ell^2} - 2mg\frac{x}{\ell} - kx - k\left(\frac{x^2}{\ell} - \ell\right)\frac{2x}{\ell} = 4m\dot{x}^2\frac{x}{\ell^2} - 2x\left(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\right) - 2k\frac{x^3}{\ell^2}$.

Pertanto si ha

$$m\ddot{x}\left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right) = -4m\dot{x}^2\frac{x}{\ell^2} - 2x\left(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\right) - 2k\frac{x^3}{\ell^2}.$$

3. Per studiare i punti di equilibrio, studiamo la derivata del potenziale:

$$V'(x) = 2mg\frac{x}{\ell} - kx + 2k\frac{x^3}{\ell^2} = x\left(\frac{2mg}{\ell} - k + 2k\frac{x^2}{\ell^2}\right).$$

Notiamo che se $k \leq \frac{2mg}{\ell}$ allora $x = 0$ è l'unico punto di equilibrio, che è stabile in quanto minimo di $V(x)$, mentre se $k > \frac{2mg}{\ell}$ allora $x = 0$ è un punto di equilibrio instabile, in quanto massimo del potenziale, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell mg}{k}}$ sono due punti di equilibrio stabili, in quanto punti di minimo del potenziale.

Esercizio 2. Let us call G and G' the center of mass of the two bars. We have

$$x_G = \frac{L}{2}\sin(\theta), \quad z_G = z + \frac{L}{2}\cos(\theta),$$
$$x_{G'} = L\sin(\theta) + \frac{L}{2}\cos(\theta), \quad z_{G'} = z + L\cos(\theta) - \frac{L}{2}\sin(\theta),$$

and, using that

$$I_G^{(bar)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dM = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho dx = \rho\frac{L^3}{12} = \frac{MR^2}{12},$$
$$I^{(tot)} = I_G + I_{G'} = \frac{MR^2}{6}.$$

The kinetic energy is

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2 + \dot{x}_{G'}^2 + \dot{z}_{G'}^2) + \frac{1}{2}I^{(tot)}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\Big[2\dot{z}^2 - L(3\sin(\theta) + \cos(\theta))\dot{\theta}\dot{z} + \frac{5}{3}L^2\dot{\theta}^2\Big];$$

while the potential energy is

$$U = -\frac{1}{2}K(z + L\cos(\theta))^2 + Mg\Big[2z + \frac{3}{2}L\cos(\theta) - \frac{1}{2}L\sin(\theta)\Big].$$

The Lagrange function is

$$L = T - U,$$

and the Euler-Lagrange equations are

$$M\ddot{z} - \frac{ML}{2}[(3c(\theta) - s(\theta))\dot{\theta}^2 + (3s(\theta) + c(\theta))\ddot{\theta}] = -2Mg + K(z + Lc(\theta));$$
$$-\frac{ML}{2}[(3c(\theta) - s(\theta))\dot{\theta}\dot{z} + (3s(\theta) + c(\theta))\ddot{z}] + \frac{5L^2}{3}\ddot{\theta} = -K(z + Lc(\theta))Ls(\theta) + \frac{ML}{2}g(3s(\theta) + c(\theta))$$

where $c(\theta) := \cos(\theta)$ and $s(\theta) := \sin(\theta)$.
Since on the body act only conservative forces the system in conservative and the energy $E = T + U$ is conserved.
The first and second derivatives of the potential energy are

$$\partial_z U = K(z + L\cos(\theta)) - 2Mg, \quad \partial_\theta U = -KL(z + L\cos(\theta))\sin(\theta) + \frac{1}{2}MgL(3\sin(\theta) + \cos(\theta))$$

and

$$\partial^2_{zz}U = K, \quad \partial^2_{z\theta}U = -KLs(\theta) \quad \partial^2_{\theta\theta}U = -KL(z + Lc(\theta))c(\theta) + Kl^2s^2(\theta) + \frac{MgL}{2}(3c(\theta) - s(\theta)).$$

From $\partial_z U = 0$ we get $z + L\cos(\theta) = \frac{2Mg}{K}$ and plugging in $\partial_\theta U = 0$ we get $\sin(\theta) = \cos(\theta)$; we have two equilibrium points

$$beginaligned(z_1, \theta_1) = \Big(\frac{2Mg}{K} - \frac{L}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\Big), \quad (z_2, \theta_2) = \Big(\frac{2Mg}{K} + \frac{L}{\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{4}\Big).$$

Since $\partial^2_{zz}U > 0$ the necessary and sufficient condition to have stable equilibrium is that the determinant of Hessian matrix is positive. The determinant is

$$\det(Hess(U)) = -K^2L(z + L\cos(\theta))\cos(\theta) + \frac{MgLK}{2}(3\cos(\theta) - \sin(\theta));$$

therefore we can see that (z_1, θ_1) is unstable while (z_2, θ_2) is stable.

Esercizio 3. 1. Le coordinate dei due punti sono date da

$$q_1 = (x_1, x_1), \qquad q_2 = (x_2, h),$$

pertanto le velocità saranno date da

$$\dot{q}_1 = (\dot{x}_1, \dot{x}_1), \qquad \dot{q}_2 = (\dot{x}_2, 0).$$

Sappiamo che la Lagrangiana $\mathcal{L}$ è la differenza tra energia cinetica T ed energia potenziale V. L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{q}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{q}_2|^2 = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2),$$

mentre l'energia potenziale è data dalla somma tra le energie potenziali gravitazionali e le energie potenziali elastiche dei due punti

$$V = mgx_1 + mgh + \frac{1}{2}k\left[(x_2^2 + h^2) + (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - h)^2\right].$$

Pertanto, la Lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = m(\dot{x_1}^2 + \dot{x}_2^2) - mgx_1 - mgh - \frac{1}{2}k\left[x_2^2 + h^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - h)^2\right].$$

2. Le equazioni di Eulero-Lagrange le possiamo ricavare ricordando che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}.$$

Pertanto:

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_1}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \Rightarrow 2m\ddot{x}_1 = -mg - k(2x_1 - x_2 - h);$
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_2}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \Rightarrow 2m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1).$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 = -mg - k(2x_1 - x_2 - h) \\ 2m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1) \end{cases}.$$

3. Le configurazioni di equilibrio sono quelle tali che

$$\begin{cases} mg + k(2x_1 - x_2 - h) = 0 \\ k(2x_2 - x_1) = 0 \end{cases}.$$

Si ha quindi un'unica configurazione di equilibrio corrispondente a $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}\left(h - \frac{mg}{k}\right), \frac{1}{3}\left(h - \frac{mg}{k}\right)\right)$. Per studiarne la stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la matrice non dipende da x_1 e x_2 e che ha autovalori $\lambda_1 = k$ e $\lambda_2 = 3k$, che sono entrambi positivi. Pertanto, la matrice è definita positiva e il punto $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}\left(h - \frac{mg}{k}\right), \frac{1}{3}\left(h - \frac{mg}{k}\right)\right)$ è stabile.

Esercizio 4. We have

$$x_G = x + \frac{L}{2}\cos(\theta), \quad y_G = \frac{L}{2}\sin(\theta);$$

therefore

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + \frac{5}{12}L^2\dot{\theta}^2 - L\sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x}\Big) - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(a - L\sin(\theta))^2.$$

The equations of motion are

$$\begin{aligned} m\Big(\ddot{x} - \frac{L}{2}\sin(\theta)\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\cos(\theta)\dot{\theta}^2\Big) &= -kx, \\ m\Big(\frac{5}{12}L^2\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin(\theta)\ddot{x}\Big) &= -kL(a - L\sin(\theta))\cos(\theta). \end{aligned}$$

The first derivatives of the potential energy are

$$\partial_x U = kx, \quad \partial_\theta U = kL(a - L\sin(\theta))\cos(\theta)$$

while the second derivatives are

$$\partial^2_{xx} = k, \quad \partial^2_{\theta\theta} = kL^2\cos^2(\theta) - kL(a - L\sin(\theta))\sin(\theta), \quad \partial^2_{x\theta} = 0.$$

There are four equilibrium positions

$$\begin{aligned} (x_1, \theta_1) &= \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big), \\ (x_2, \theta_2) &= \Big(0, \frac{3\pi}{2}\Big), \\ (x_3, \theta_3) &= \Big(0, +\arcsin\Big(\frac{a}{L}\Big)\Big), \\ (x_4, \theta_4) &= \Big(0, -\arcsin\Big(\frac{a}{L}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Since $\partial^2_{xx} > 0$, the necessary and sufficient condition to have stable equilibrium is that the determinant of Hessian matrix is positive. The determinant is

$$\det(Hess(U)) = k^2L2\cos^2(\theta) - k^2L(a - L\sin(\theta))\sin(\theta);$$

therefore, (x_1, θ_1) is stable if and only if $\lambda > 1$; (x_2, θ_2) is never stable; positions (x_3, θ_3) and (x_4, θ_4) are always stable.
If OM is fixed there is non potential energy of the spring; the Lagrangian does not depend on x and so

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}mL\sin(\theta)\dot{\theta}$$

is a constant of motion. The other one is the energy since the the system is conservative.