Tutorato 11
FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)
Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
LEZIONI: Guido Gentile
ESERCITAZIONI: Livia Corsi
TUTORATO: Federico Manzoni, Michela Policella

23/05/2023

Sistemi Hamiltoniani e trasformazioni canoniche

Esercizio 1. Given the following Lagrangian

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + 2q_1\dot{q}_2 + q_1 e^{q_2},$$

find the Hamiltonian and the Hamilton equations.

Esercizio 2. Per $q > 0$ si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2q^2}\left(1 + \left(\frac{\dot{q}}{q^2}\right)^2\right).$$

1. Si determini l'Hamiltoniana.
2. Si determinino le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = \frac{P}{2q^2}$ e si calcolino la nuova Hamiltoniana e le nuove equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P).
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

Esercizio 3. Given the following transformation

$$p = 5^{\frac{1}{b}} Q^{\frac{1}{b}} q^{-\frac{a}{b}}, \quad P = c 5^{\frac{7}{b}} Q^{\frac{7}{b}} q^{5-\frac{7a}{b}}$$

from variables q, Q to variables p, P, find the parameters $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that the transformation is canonical and determine the generating function $F_4(p, P)$.

Esercizio 4. Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = 2a \log p + \log q \\ P = -p^b q \log q \end{cases}$$

per $q, p > 0$.

1. Si determinino i valori di a, b per cui la trasformazione è canonica.

2. Si determini l'inversa della trasformazione canonica del punto precedente e si trovi una funzione generatrice di prima specie che la generi.

3. Si consideri l'Hamiltoniana $H(q, p) = \frac{1}{2} q^2 p^2 \log^2 q$. Si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$ nelle nuove coordinate, si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti e le si risolvano in corrispondenza dei dati iniziali $(Q_0 = Q(q_0, p_0), P_0 = P(q_0, p_0))$, dove $(q_0, p_0) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$. Infine, si usi la trasformazione inversa trovata al punto precedente per riesprimere la soluzione nelle variabili originali (q, p).

Soluzioni

Esercizio 1. Let us compute the conjugate momenta to q_1 and q_2

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 2q_1 \tag{1}$$

The Hamiltonian is defined as Legendre transform of the Lagrangian, where $p = (p_1, p_2)$ and similar for $\dot{q}$,

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p \cdot \dot{q} - L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \dot{q}_1^2 + 2q_1\dot{q}_2 - \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - 2q_1\dot{q}_2 - q_1 e^{q_2} = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2 e^{q_2}.$$

The Hamilton equations are

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \left(p_1, -\frac{1}{2}p_2 e^{q_2}\right), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \left(e^{q_2}, \frac{1}{2}p_2 e^{q_2}\right).$$

Esercizio 2.

1. Data la Lagrangiana, sappiamo che

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^6} \;\Rightarrow\; \dot{q} = pq^6,$$

da cui segue che l'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}p^2 q^6 - \frac{1}{2q^2}.$$

2. Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono date da

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^6 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -3p^2 q^5 - \frac{1}{q^3} \end{cases}.$$

3. La trasformazione canonica generata da $F(q, P)$ è data da

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{q^2} \\ p = \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{P}{q^3} \end{cases},$$

che è ben definita e invertibile. La trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2Q}} \\ p = -P(2Q)^{3/2} \end{cases}.$$

Pertanto, l'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} - Q$$

e le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 1 \end{cases}.$$

4. Se $(q(0), p(0)) = (1, 0)$ allora $(Q(0), P(0)) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. La soluzione delle equazioni del moto è data da
$$\begin{cases} P(t) = P(0) + t = t \\ Q(t) = Q(0) + \frac{P^2(t)}{2} = \frac{1}{2}(1+t^2) \end{cases},$$
pertanto la soluzione nelle variabili di partenza sarà data da
$$\begin{cases} q(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ p(t) = -t(1+t^2)^{3/2} \end{cases}.$$

5. Data la Lagrangiana di partenza, l'equazione di Eulero-Lagrange è
$$\ddot{q} = \frac{3\dot{q}^2}{q} - q^3.$$
Se consideriamo la soluzione $q(t)$ ottenuta al punto precedente abbiamo che
$$\begin{cases} \dot{q} = -t(1+t^2)^{-(3/2)} \\ \ddot{q} = -(1+t^2)^{-(3/2)} + 3t^2(1+t^2)^{-(5/2)} \end{cases}.$$
Sostituendo le espressioni per $q, \dot{q}, \ddot{q}$ nell'equazione di Eulero-Lagrange si ottiene la tesi.

Esercizio 3. We invert the relations and we obtain
$$Q = \frac{1}{5} q^a p^b, \quad P = c q^5 p^7;$$
we impose the fundamental Poisson bracket to be 1
$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{c}{5}(7a - 5b) q^{a+4} p^{b+6} = 1 \Rightarrow a = -4, b = -6, c = \frac{5}{2}.$$
We have $dF_4(p, P) = -qdp + QdP$ with
$$q = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}} P^{\frac{1}{5}} p^{-\frac{7}{5}}, \quad Q = 5^{-\frac{1}{5}} 2^{-\frac{4}{5}} P^{-\frac{4}{5}} p^{-\frac{2}{5}}$$
Solving the equations
$$\frac{\partial F_4}{\partial p} = -q = -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}} P^{\frac{1}{5}} p^{-\frac{7}{5}}, \quad \frac{\partial F_4}{\partial P} = Q = 5^{-\frac{1}{5}} 2^{-\frac{4}{5}} P^{-\frac{4}{5}} p^{-\frac{2}{5}}$$
we find a possible generating function
$$F_4(p, P) = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4}{5}} P^{\frac{1}{5}} p^{-\frac{2}{5}}.$$

Esercizio 4. 1. Per determinare i valori di a, b per cui la trasformazione è canonica, imponiamo che le parentesi di Poisson siano pari a 1:
$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = p^{b-1}\left((2a - b)\log q + 2a\right) = 1$$
per $2a = b = 1$, per cui la trasformazione di coordinate è
$$\begin{cases} Q = \log p + \log q \\ P = -pq \log q \end{cases}.$$

2. Dalla prima delle equazioni ricaviamo $pq = e^Q$. Sostituendo nella seconda otteniamo che la trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = e^{-Pe^{-Q}} \\ p = e^{Q+Pe^{-Q}} \end{cases}.$$

Dobbiamo poi trovare una funzione generatrice $F(q, Q)$ tale che

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = e^Q \log q,$$

ossia

$$F(q, Q) = e^Q \log q + f(Q).$$

Applicando la prima equazione, con $f(Q) = 0$, otteniamo

$$F(q, Q) = e^Q \log q.$$

3. Utilizzando la trasformazione al punto precedente, la nuova Hamiltoniana è data da

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2}$$

e le nuove equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \end{cases}.$$

La soluzione in corrispondenza dei dati iniziali $(Q(0), P(0)) = (0, -1)$ è data da

$$\begin{cases} P(t) = P(0) = -1 \\ Q(t) = Q(0) + P(0)t = -t \end{cases}.$$

Usando la trasformazione inversa si ottiene la soluzione nelle variabili originali:

$$\begin{cases} q(t) = e^{e^t} \\ p(t) = e^{-t-e^t} \end{cases}.$$