Tutorato 12

FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)

Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Lezioni: Guido Gentile
Esercitazioni: Livia Corsi
Tutorato: Federico Manzoni, Michela Policella

30/05/2023

# Preparazione al secondo esonero

**Esercizio 1.** Si consideri un punto materiale di massa $m$ vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2(x^2 + y^2) + z^2 = R^2,$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm R)$ tramite due molle di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo nulla.

1. Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e. della forma

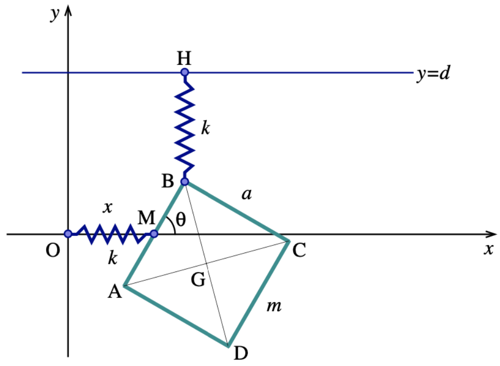
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z)\cos\theta \\ \rho(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix},$$

con $\rho(z) = \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}}$, $z \in [-R, R]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema vincolato usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta})$.

2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

3. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si determinino due grandezze conservate.

**Esercizio 2.** In a horizontal plane a homogeneous square guide ABCD, with side $a$ and mass $m$, moves. The midpoint $M$ of the side $AB$ is constrained to slide without friction along the axis $Ox$, and the square guide is free to rotate around an axis perpendicular to the plane $Oxy$ and passing through $M$ (see figure below). The active forces are due to two springs ($k > 0$) and $H$ is the orthogonal projection of $B$ on the straight line $y = d$ with $d \geq 0$. Use the abscissa $x$ of $M$ and the angle $\theta$ as Lagrangian coordinates.




1. Write down the Lagrangian of the system, find a conserved quantity and write the Euler-Lagrange equations;
2. find the equilibrium positions and study their stability as the parameter $\lambda = \frac{a}{d}$ varies;
3. write the conjugate momenta of the variables $\theta$ and $x$.

**Esercizio 3.** Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3}.$$

1. Si determini l'Hamiltoniana.
2. Si determinino le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = \frac{Pq^3}{3}$ e si calcolino la nuova Hamiltoniana e le nuove equazioni di Hamilton nelle variabili $(Q, P)$.
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

**Esercizio 4.** Given the following transformation

$$q = \left(\frac{Q}{3}\right)^{\frac{1}{3}} p^{-\frac{2}{3}}, \quad P = Bp^{\delta - \frac{2\gamma}{3}} \left(\frac{Q}{3}\right)^{\frac{\gamma}{3}}$$

say for which values of the real parameters $B, \delta, \gamma$ the transformation is canonical and find a possible generating function $F_2(q, P)$. Given the Hamiltonian of a harmonic oscillator (with mass $m$ and elastic constant $k$) written in $(q, p)$ variables write it in $(Q, P)$ variables and write the Hamilton equations

# Soluzioni

**Esercizio 1.** 1. Data la parametrizzazione in coordinate cilindriche si ha che

$$\dot{\mathbf{x}} = \ell \begin{pmatrix} -\frac{\dot{z}z}{\sqrt{2(R^2-z^2)}}\cos\theta - \dot{\theta}\sqrt{\frac{R^2-z^2}{2}}\sin\theta \\ -\frac{\dot{z}z}{\sqrt{2(R^2-z^2)}}\sin\theta - \dot{\theta}\sqrt{\frac{R^2-z^2}{2}}\cos\theta \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

da cui segue che

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \dot{z}^2\frac{2R^2-z^2}{R^2-z^2} + \dot{\theta}^2\frac{R^2-z^2}{2}.$$

Pertanto, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2\frac{2R^2-z^2}{R^2-z^2} + \dot{\theta}^2\frac{R^2-z^2}{2}\right),$$

mentre l'energia potenziale, pari alla somma tra energia potenziale gravitazionale ed energia potenziale elastica, è data da

$$V = mgz + \frac{1}{2}k(3R^2+z^2).$$

La Lagrangiana del sistema nelle variabili $z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}$ è data quindi da

$$\mathcal{L}(z,\theta,\dot{z},\dot{\theta}) := T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2\frac{2R^2-z^2}{R^2-z^2} + \dot{\theta}^2\frac{R^2-z^2}{2}\right) - mgz - \frac{1}{2}k(3R^2+z^2).$$

2. Calcoliamo le equazioni di Eulero-Lagrange:

   - $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z}\frac{2R^2-z^2}{R^2-z^2} = -\frac{m\dot{z}^2zR^2}{(R^2-z^2)^2} - \frac{1}{2}mz\dot{\theta}^2 - mg - kz;$
   - $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Rightarrow m\ddot{\theta}\frac{R^2-z^2}{2} - mz\dot{z}\dot{\theta} = 0.$

   Le equazioni di Eulero-Lagrange sono date quindi da

$$\begin{cases} m\ddot{z}\frac{2R^2-z^2}{R^2-z^2} = -\frac{m\dot{z}^2zR^2}{(R^2-z^2)^2} - \frac{1}{2}mz\dot{\theta}^2 - mg - kz \\ m\ddot{\theta}\frac{R^2-z^2}{2} - mz\dot{z}\dot{\theta} = 0 \end{cases}.$$

3. La seconda delle equazioni ci dice che $\theta$ è una variabile ciclica e che

$$A := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m\dot{\theta}\frac{R^2-z^2}{2}$$

   è una costante del moto.

   Vediamo che anche l'energia meccanica

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2\frac{2R^2-z^2}{R^2-z^2} + \dot{\theta}^2\frac{R^2-z^2}{2}\right) + mgz + \frac{1}{2}k(3R^2+z^2)$$

   è una quantità conservata:

$$\frac{d}{dt}E = m\dot{z}\ddot{z}\frac{2R^2-z^2}{R^2-z^2} + \frac{mz\dot{z}^3R^2}{(R^2-z^2)^2} - \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2z\dot{z} + mg\dot{z} + kz\dot{z} = 0,$$

   dove l'ultima uguaglianza segue in modo diretto dalle equazioni di Eulero-Lagrange.

**Esercizio 2.** We have $x_M = x$ and $y_B = \frac{a}{2}\sin(\theta)$ so

$$x_G = x + \frac{a}{2}\sin(\theta), \quad y_G = -\frac{a}{2}\cos(\theta).$$

The inertial momentum of a bar with respect its center of mass can be computed as

$$I_{cm}^{(1-bar)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dm = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \rho dx = \rho\frac{2a^3}{24} = \frac{ma^2}{12}$$

from Hyugens-Steiner theorem we have that, for a single bar,

$$I_G^{(1-bar)} = I_{cm}^{(1-bar)} + \frac{m}{4}\frac{a^2}{4}.$$

We have four bars and the computation is always the same; we get

$$I_G^{(square)} = 4I_{cm}^{(1-bar)} + 4\frac{m}{4}\frac{a^2}{4} = \frac{4ma^2 + 3ma^2}{12} = \frac{7}{12}ma^2.$$

The kinetic energy is

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G^{(square)}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + a\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + \frac{10}{12}a^2\dot{\theta}^2\right]$$

while the potential energy is

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(d - \frac{a}{2}\sin(\theta)\right)^2.$$

The equations of motion are

$$\frac{10}{12}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ma(\ddot{x}\cos(\theta) - \dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)) = -k\left(d - \frac{a}{2}\sin(\theta)\right)\frac{a}{2}\cos(\theta);$$
$$m(\ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos(\theta) - a\dot{\theta}^2\sin(\theta)) = -kx.$$

A conserved quantity is the total energy $E = K + U$. The first derivatives of the potential are

$$\partial_x U = kx, \quad \partial_\theta = \frac{ka}{2}\left(d - \frac{a}{2}\sin(\theta)\right)\cos(\theta),$$

while the second ones are

$$\partial^2_{xx} = k, \quad \partial^2_{\theta\theta} = \frac{ka}{2}\left(d - \frac{a}{2}sin(\theta)\right)\cos(\theta) + \frac{ka^2}{4}\cos^2(\theta), \quad \partial^2_{x\theta} = \partial^2_{\theta x} = 0.$$

The equilibrium points are the zeros of the first potential derivatives

$$(x_1, \theta_1) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$(x_2, \theta_2) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right),$$
$$(x_3, \theta_3) = \left(0, +\arcsin\left(\frac{2d}{a}\right)\right),$$
$$(x_4, \theta_4) = \left(0, -\arcsin\left(\frac{2d}{a}\right) + \pi\right).$$

Since $\partial^2_{xx} > 0$, necessary and sufficient condition to have stability is that $\partial^2_{\theta\theta} > 0$. For the first position this happens when $\lambda < 2$; for the second position this does not happens for any value of $\lambda$; the last two position are stable when they exist, i.e. for $\lambda \geq 2$.

The conjugate momenta are

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m[2\dot{x} + a\cos(\theta)\dot{\theta}], \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}m\left[a\cos(\theta)\dot{x} + \frac{10}{6}a^2\dot{\theta}\right].$$

**Esercizio 3.**

1. Data la Lagrangiana, sappiamo che

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}q^4 \ \Rightarrow \ \dot{q} = \frac{p}{q^4},$$

da cui segue che l'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H(q,p) = [p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q})]|_{\dot{q}=\frac{p}{q^4}} = \frac{p^2}{q^4} + \frac{q^3}{3}.$$

2. Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono date da

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{q^4} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{2p^2}{q^5} - q^2 \end{cases}.$$

3. La trasformazione canonica generata da $F(q,P)$ è data da

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{q^3}{3} \\ p = \frac{\partial F}{\partial q} = Pq^2 \end{cases},$$

che è ben definita e invertibile. La trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = (3Q)^{1/3} \\ p = P(3Q)^{2/3} \end{cases}.$$

Pertanto, l'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$\tilde{H}(Q,P) = \frac{P^2}{2} + Q$$

e le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -1 \end{cases}.$$

4. Se $(q(0), p(0)) = (1, 0)$ allora $(Q(0), P(0)) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$. La soluzione delle equazioni del moto è data da

$$\begin{cases} P(t) = P(0) - t = -t \\ Q(t) = Q(0) - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{3} - \frac{t^2}{2} \end{cases},$$

pertanto la soluzione nelle variabili di partenza sarà data da

$$\begin{cases} q(t) = \left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{1/3} \\ p(t) = -t\left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{2/3} \end{cases}.$$

5. Data la Lagrangiana di partenza, l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\ddot{q}q^4 + 2\dot{q}^2q^3 + q^2 = 0.$$

Se consideriamo la soluzione $q(t)$ ottenuta al punto precedente abbiamo che

$$\begin{cases} \dot{q} = -t\left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{-(2/3)} \\ \ddot{q} = -\left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{-(2/3)} - 2t^2\left(1 - \frac{3t^2}{2}\right)^{-(5/3)} \end{cases}.$$

Sostituendo le espressioni per $q, \dot{q}, \ddot{q}$ nell'equazione di Eulero-Lagrange si ottiene la tesi.

**Esercizio 4.** We have

$$Q = 3q^2p^2, \quad P = Bq^\gamma p^\delta;$$

imposing the fundamental Poisson bracket we have

$$3B(3\delta - 2\gamma)q^{\gamma+2}p^{\delta+1} = 1 \Rightarrow \gamma = -2, \delta = -1, B = \frac{1}{3}.$$

To compute $F_2(q, P)$ we need $p, Q$ in function of $q, P$. We have

$$p = \frac{1}{3}q^{-2}P^{-1}, Q = \frac{1}{3}q^{-1}P^{-2}, \tag{1}$$

and solving the equations

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p = \frac{1}{3}q^{-2}P^{-1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q = \frac{1}{3}q^{-1}P^{-2}$$

we get the possible primitive

$$F_2(q, P) = -\frac{1}{3}q^{-1}P^{-1}.$$

Let us invert relations 1

$$q = \frac{1}{3}Q^{-1}P^{-2}, \quad p = 3Q^2P^3;$$

the transformation is completely canonical and the new Hamiltoian is simply

$$H(P, Q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{9Q^4P^6}{2m} + \frac{1}{18}kQ^{-2}P^{-4}.$$

The Hamilton equation are

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{27Q^4P^2}{m} - \frac{2k}{9}Q^{-2}P^{-5};$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{18Q^3P^6}{m} + \frac{1}{9}Q^{-3}P^{-4}.$$