# Tutorato 3
## FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)
## Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Lezioni: Guido Gentile
Esercitazioni: Livia Corsi
Tutorato: Federico Manzoni, Michela Policella

14/03/2023

# Punti di equilibrio e sistemi meccanici unidimensionali

**Esercizio 1.** Si consideri l'equazione

$$\ddot{x} = x - \frac{1}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Determinare una costante del moto del sistema.
3. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
4. Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale e ricavarne un'analisi del moto nel piano delle fasi.

**Esercizio 2.** Given a body of unitary mass subjected to the following forces

1. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F = (q_1 e^{q_2}, q_2 + a q_1^2 e^{q_2}) \ \ a \in \mathbb{R}$;
2. $F : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ F = (q_1 + 3\cos(q_2), \cos(q_2) + q_1 - 1)$;
3. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F = ax^3 + cx \ \ a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$;

study the equilibrium points.

**Esercizio 3.** Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza di energia potenziale potenziale

$$V(x) = -\frac{3}{4} e^{x^2}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico che descrive il moto.
2. Determinare una costante del moto del sistema.
3. Studiare qualitativamente il moto, i.e. partendo dal grafico di $V(x)$, identificare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità, rappresentare le curve di livello al variare dell'energia, identificare i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
4. Se esistono moti periodici, calcolarne il periodo in forma di integrale definito.
5. Se esistono moti illimitati, dire se il tempo per arrivare all'infinito è finito o no e se il moto esiste globalmente.

**Esercizio 4.** A body of unitary mass is subjected to the following potentials

1. $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ V(q_1)=\frac{1}{2}(q_1-\sqrt{3})^2-\ln(q_1)$
2. $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ V(q_1)=\alpha q_1^4+\beta q_1^2 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

study the potentials and classify the equilibrium points.

**Esercizio 5.** Si consideri l'equazione

$$\ddot{x}=-2x(2x^2+x-2),\quad x\in\mathbb{R}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Determinare una costante del moto del sistema.
3. Studiare qualitativamente il moto, i.e. partendo dal grafico di $V(x)$ (che si può ricavare ricordando che $\ddot{x}=-V'(x)$), identificare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità, rappresentare le curve di livello al variare dell'energia, identificare i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
4. Se esistono moti periodici, calcolarne il periodo in forma di integrale definito.

# Soluzioni

**Esercizio 1.** 1. Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato all'equazione è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \frac{1}{x^3} \end{cases}$$

2. Il sistema ammette come energia potenziale $V(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$, poiché vale che $\ddot{x} = -V'(x)$. Una costante del moto è data pertanto dall'energia meccanica

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}.$$

3. Si ha che $\dot{x} = 0$ se $y = 0$ e $\dot{y} = 0$ se $x = \pm 1$, pertanto i due punti di equilibrio del sistema sono $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$.

   Per studiarne la stabilità, calcoliamo gli autovalori della matrice del sistema linearizzato nei punti $P_1$ e $P_2$:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \frac{3}{x^4} & 0 \end{pmatrix},$$

   da cui segue che

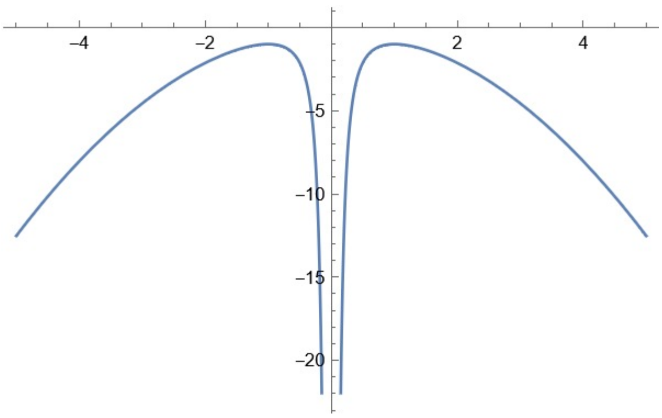
$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

   i cui autovalori sono $\lambda = \pm 2$. Pertanto, $P_1$ e $P_2$ sono punti di sella.

   Si noti che lo stesso risultato poteva essere ottenuto studiando i punti critici dell'energia potenziale $V(x)$.

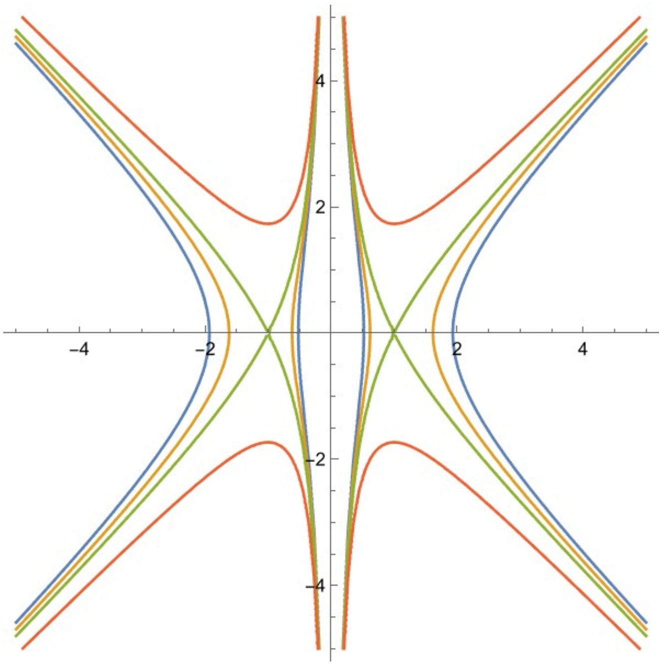
4. Per quanto riguarda lo studio dell'energia potenziale, si ha che $\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = -\infty$ e le uniche intersezioni con gli assi sono in $(\pm 1, 0)$ (punti di massimo). Inoltre, in $x = 0$ si ha un asintoto verticale.

   Un grafico qualitativo dell'energia potenziale è pertanto il seguente:




   Da $E = \frac{y^2}{2} + V(x)$ si ha $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò, nel piano delle fasi si hanno curve simmetriche rispetto all'asse $x$ per valori di $x$ tali che $V(x) \leq E$.

   A partire dal grafico dell'energia potenziale si può quindi fare uno studio qualitativo del moto nel piano delle fasi, ottenendo




**Esercizio 2.** As we know from the previous exercises sheet, we can use linearizzation of Lyapunov function.

1. The equilibium poits are given by the system

$$\begin{cases} q_1 e^{q_2} = 0 \\ q_2 + a q_1^2 e^{q_1} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x_{eq} = (0,0). \tag{1}$$

   The Jacobian matrix is

$$J(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} e^{q_2} & 2aq_1 e^{q_1} \\ q_1 e^{q_2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

   Since $\mathcal{R}e(\lambda_{1,2}) > 0$, the point $x_{eq}$ is unstable.

2. The equilibium poits are given by the system

$$\begin{cases} q_1 + 3\cos(q_2) = 0 \\ q_1 - 1 + \cos(q_2) = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

   inserting the first equation in the second we get

$$q_1 - \frac{q_1}{3} - 1 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{3}{2} \tag{4}$$

   and, at this point, from the first we get

$$\cos(q_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}. \tag{5}$$

   Therefore the eqilibrium points are

$$x_{eq1} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \quad x_{eq2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \tag{6}$$

The Jacobian matrix is

$$J(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 & -3\sin(q_2) \\ 1 & -\sin(q_2) \end{pmatrix}; \tag{7}$$

computed at the equilibrium points we have

$$J(x_{eq1}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad J(x_{eq2}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

The eigenvalues are

$$\begin{aligned} p_{ch}^{J(x_{eq1})}(\lambda) &= (1-\lambda)\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\Big) + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2} - 5\sqrt{3}}}{2}; \\ p_{ch}^{J(x_{eq2})}(\lambda) &= (1-\lambda)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\Big) - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2} + 5\sqrt{3}}}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

In both cases there is at least one eigenvalue with positive real part; the equilibrium points are unstable.

3. The equilibium point are given by

$$ax^3 + cx = x(ax^2 + c) = 0 \Rightarrow x_{eq1} = 0, \; x_{eq2} = +\sqrt{-\frac{c}{a}}, \; x_{eq3} = -\sqrt{-\frac{c}{a}}. \tag{10}$$

The jacobian matrix reduces to the ordinary derivative and we have

$$F'(x) = 3ax^2 + c, \tag{11}$$

so we have

$$\begin{aligned} F'(x_{eq1}) &= c; \\ F'(x_{eq2}) &= 3ax^2 + c; \\ F'(x_{eq3}) &= 3ax^2 + c. \end{aligned} \tag{12}$$

First of all $a \neq 0$ otherwise equilibrium point $x_{eq2}$ and $x_{eq3}$ are not well defined. The first equilibrium point is stable if $c < 0$ and unstable if $c > 0$. For the second equilibrium point, since $ax_{eq_1}^2 + c = 0$, we have $F'(x_{eq1}) = -2c$ so if $c > 0$ the equilibrium point is stable while if $c < 0$ it is unstable. Same considerations hold for $x_{eq2}$.

**Esercizio 3.** 1. L'equazione del moto è data da

$$\ddot{x} = -V'(x) = \frac{3}{2}xe^{x^2}.$$

Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato è descritto dalle equazioni

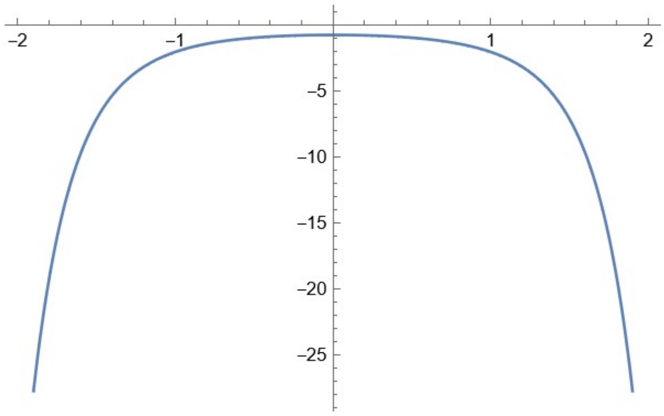
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{3}{2}xe^{x^2} \end{cases}.$$

2. Una costante del moto è data dall'energia meccanica

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}e^{x^2}.$$

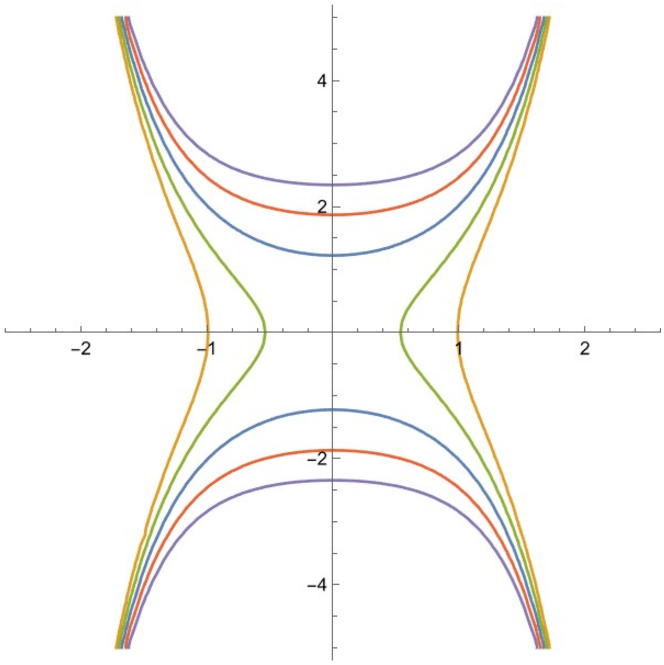
3. Si noti che $V(x) < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = -\infty$. Inoltre, $V'(x) \leq 0$ e si ha che $V'(x) = 0$ per $x = 0$. Infine, $V''(x) = -\frac{3}{2}e^{x^2} - 3x^2e^{x^2} \leq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Il grafico dell'energia potenziale è, pertanto, il seguente:




L'unico punto di equilibrio del sistema è $(0,0)$ ed è un punto di equilibrio instabile.

Il moto nel piano delle fasi è dato da




Per tutti i dati iniziali, i moti sono illimitati (moti aperti). Non esistono, pertanto, moti periodici.

4. Dal punto precedente si ha che non esistono moti periodici.

5. Fissato un dato iniziale $x(0)$, il tempo per arrivare all'infinito è dato da

$$t_\infty = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(2(E - V(x))}} = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2E + \frac{3}{2}e^{x^2}}}.$$

Si ha, però, che

$$\frac{1}{\sqrt{2E + \frac{3}{2}e^{x^2}}} \sim \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-x}, \quad x \to +\infty.$$

Pertanto, l'integrale converge all'infinito, $t_\infty < +\infty$ e il moto non esiste globalmemte.

**Esercizio 4.** We can use Lagrange-Dirichlet theorem. The theorem concerns conservative holonomic mechanical systems with finite degrees of freedom and states that every strict local minimum of the potential is a Lyapunov stable equilibrium point of the dynamics. Moreover, in $D = 1$, maximum of the function are unstable equilibrium points.

1. The derivative of the potential is

$$V'(q_1) = q_1 - \sqrt{3} - \frac{1}{q_1} \tag{13}$$

therefore the stationary points are given by

$$V'(q_1) = q_1 - \sqrt{3} - \frac{1}{q_1} = 0 \Rightarrow q_1^2 - \sqrt{3}q_1 - 1 = 0; \tag{14}$$

they are

$$(q_1)_{eq_1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}, \quad (q_1)_{eq_2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}. \tag{15}$$

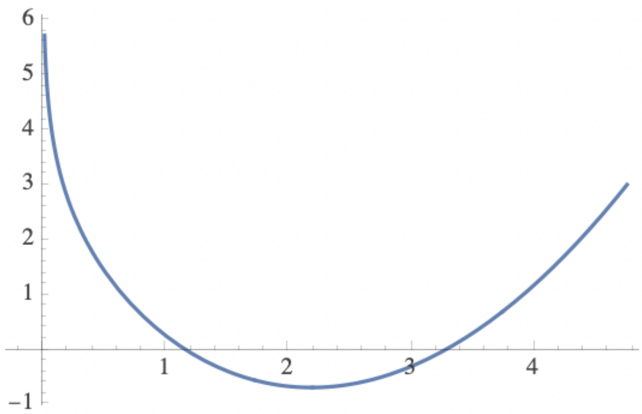
The second derivative is

$$V''(q_1) = 1 + \frac{1}{q^2}; \tag{16}$$

since it is positive in $(q_1)_{eq_2}$, follow that $(q_1)_{eq_2}$ is a stable equilibrium point. We have to throw away $(q_1)_{eq_1}$ since the potential is defined only for $\mathbb{R}^+$, moreover

$$\lim_{q_1 \to 0^+} V(q_1) = +\infty, \quad \lim_{q_1 \to +\infty} V(q_1) = +\infty. \tag{17}$$

The plot is




2. This is the potential of the Higgs in the Standard Model. The derivative of the potential is

$$V'(q_1) = 4\alpha q_1^3 + 2\beta q_1 \tag{18}$$

therefore the stationary points are given by

$$V'(q_1) = 4\alpha q_1^3 + 2\beta q_1 = 0. \tag{19}$$

If $\alpha = 0, \beta \in \mathbb{R}^+$ we have

$$V'(q_1) = 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \tag{20}$$

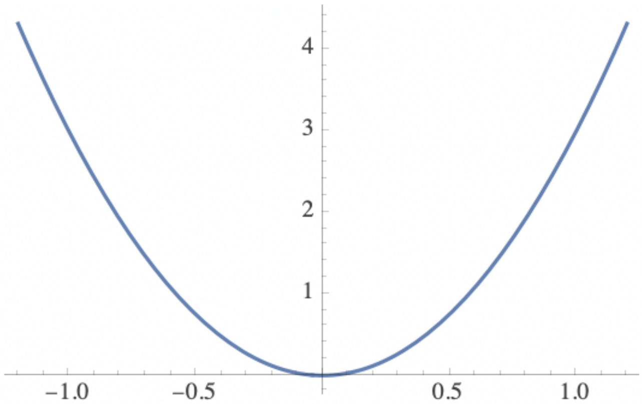
and

$$V''((q_1)_{eq}) = 2|\beta| > 0. \tag{21}$$

The point $(q_1)_{eq}$ is a minimum, so stable, and

$$\lim_{q_1 \to \pm\infty} V(q_1) = +\infty. \tag{22}$$

The plot is




If $\alpha = 0, \beta \in \mathbb{R}^-$ we have

$$V'(q_1) = -2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \tag{23}$$

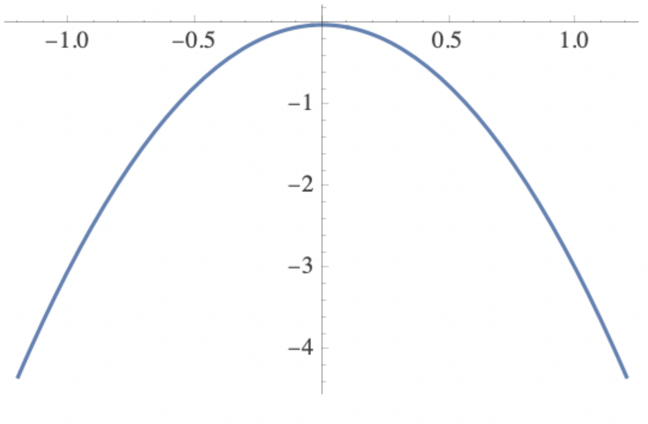
and

$$V''((q_1)_{eq}) = -2|\beta| < 0. \tag{24}$$

The point $(q_1)_{eq}$ is a maximum, so unstable, and

$$\lim_{q_1 \to \pm\infty} V(q_1) = -\infty. \tag{25}$$

The plot is




If $\alpha \in \mathbb{R}^+, \beta = 0$ we have

$$V'(q_1) = 4|\alpha|q_1^3 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \tag{26}$$

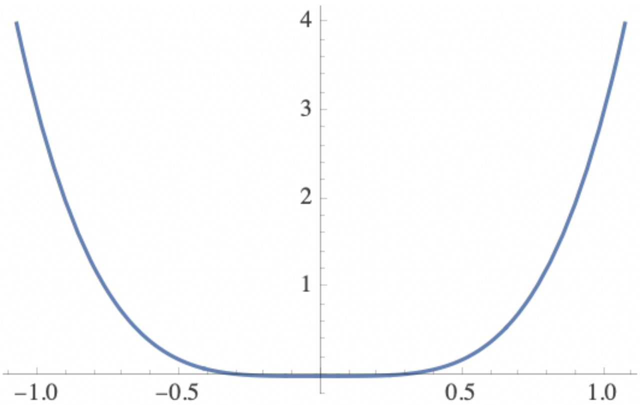
and

$$V''((q_1)_{eq}) = 12|\alpha|(q_1)_{eq}^2 = 0. \tag{27}$$

We have

$$\lim_{q_1 \to \pm\infty} V(q_1) = +\infty, \tag{28}$$

and the point $(q_1)_{eq}$ is a minimum and so stable. The plot is




If $\alpha \in \mathbb{R}^-, \beta = 0$ we have

$$V'(q_1) = -4|\alpha| q_1^3 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \tag{29}$$

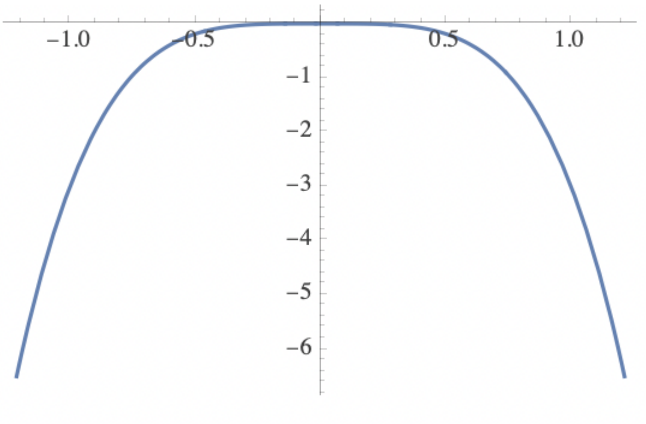
and

$$V''((q_1)_{eq}) = -12|\alpha|(q_1)_{eq}^2 = 0. \tag{30}$$

We have

$$\lim_{q_1 \to \pm\infty} V(q_1) = -\infty, \tag{31}$$

and the point $(q_1)_{eq}$ is a maximum and so unstable. The plot is




If $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ we have

$$V'(q_1) = 4|\alpha| q_1^3 + 2|\beta| q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \tag{32}$$

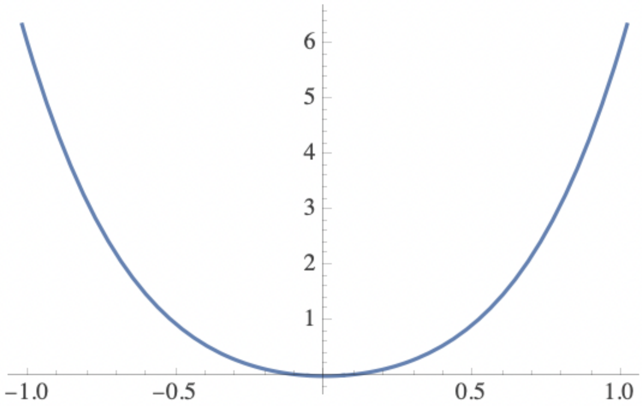
and

$$V''((q_1)_{eq}) = 12|\alpha|(q_1)_{eq}^2 + 2|\beta| > 0. \tag{33}$$

The point $(q_1)_{eq}$ is a minimum, so stable, and

$$\lim_{q_1 \to \pm\infty} V(q_1) = +\infty. \tag{34}$$

The plot is




If $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^-$ we have

$$V'(q_1) = -4|\alpha|q_1^3 - 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq} = 0, \tag{35}$$

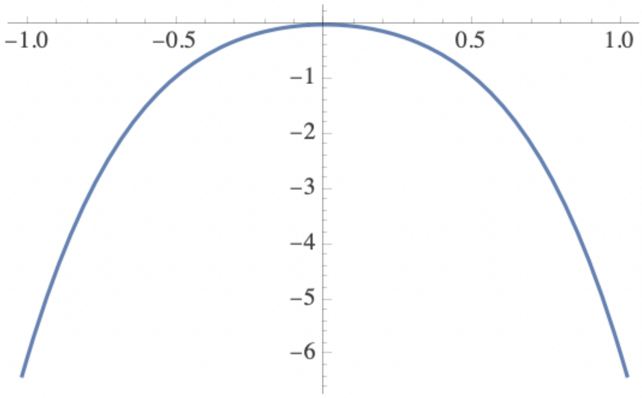
and

$$V''((q_1)_{eq}) = -12|\alpha|(q_1)_{eq}^2 - 2|\beta| < 0. \tag{36}$$

The point $(q_1)_{eq}$ is a maximum, so unstable, and

$$\lim_{q_1 \to \pm\infty} V(q_1) = +\infty. \tag{37}$$

The plot is




If $\alpha \in \mathbb{R}^- \beta \in \mathbb{R}^+$ we have

$$V'(q_1) = -4|\alpha|q_1^3 + 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq1} = 0, \ (q_1)_{eq2} = +\sqrt{\frac{1}{2}\frac{|\beta|}{|\alpha|}}, \ (q_1)_{eq3} = -\sqrt{\frac{1}{2}\frac{|\beta|}{|\alpha|}} \tag{38}$$

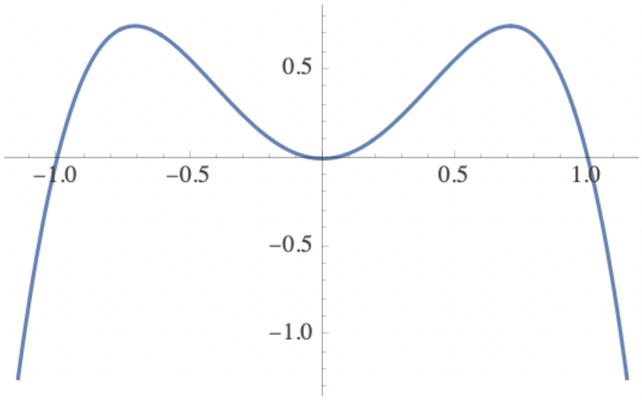
and

$$V''(q_1) = -12|\alpha|q_1^2 + 2|\beta|. \tag{39}$$

We have $V((q_1)_{eq1}) > 0$ so $(q_1)_{eq1}$ is a minimum and so stable, $V((q_1)_{eq2}) = V((q_1)_{eq3}) < 0$ so $(q_1)_{eq2}$ and $(q_1)_{eq3}$ are maximum and so unstable. Moreover

$$\lim_{q_1 \to \pm\infty} V(q_1) = -\infty. \tag{40}$$

The plot is




If $\alpha \in \mathbb{R}^+ \beta \in \mathbb{R}^-$ we have

$$V'(q_1) = +4|\alpha|q_1^3 - 2|\beta|q_1 = 0 \Rightarrow (q_1)_{eq1} = 0,\ (q_1)_{eq2} = +\sqrt{\frac{1}{2}\frac{|\beta|}{|\alpha|}},\ (q_1)_{eq3} = -\sqrt{\frac{1}{2}\frac{|\beta|}{|\alpha|}} \tag{41}$$

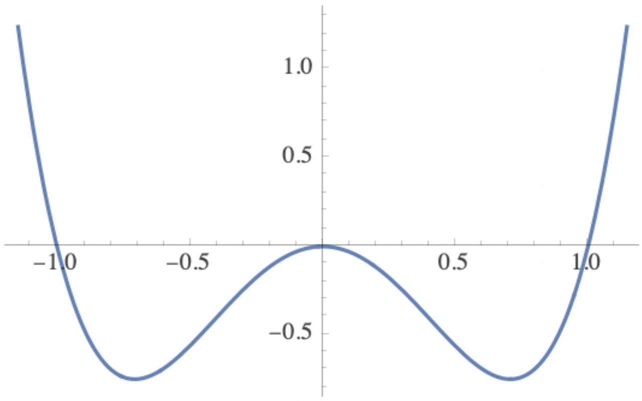
and

$$V''(q_1) = +12|\alpha|q_1^2 - 2|\beta|. \tag{42}$$

We have $V((q_1)_{eq1}) < 0$ so $(q_1)_{eq1}$ is a maximum and so unstable, $V((q_1)_{eq2}) = V((q_1)_{eq3}) > 0$ so $(q_1)_{eq2}$ and $(q_1)_{eq3}$ are minimum and so stable. Moreover

$$\lim_{q_1 \to \pm\infty} V(q_1) = +\infty. \tag{43}$$

The plot is




**Esercizio 5.** 1. Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato all'equazione è

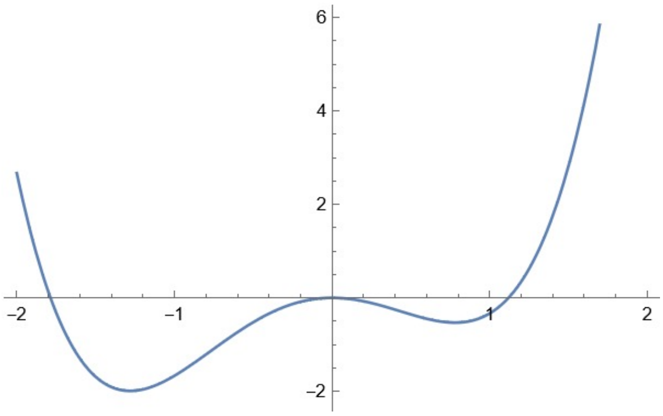
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x(2x^2 + x - 2) \end{cases}.$$

2. Il sistema ammette come energia potenziale $V(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$, poiché vale che $\ddot{x} = -V'(x)$. Una costante del moto è data pertanto dall'energia meccanica

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2.$$

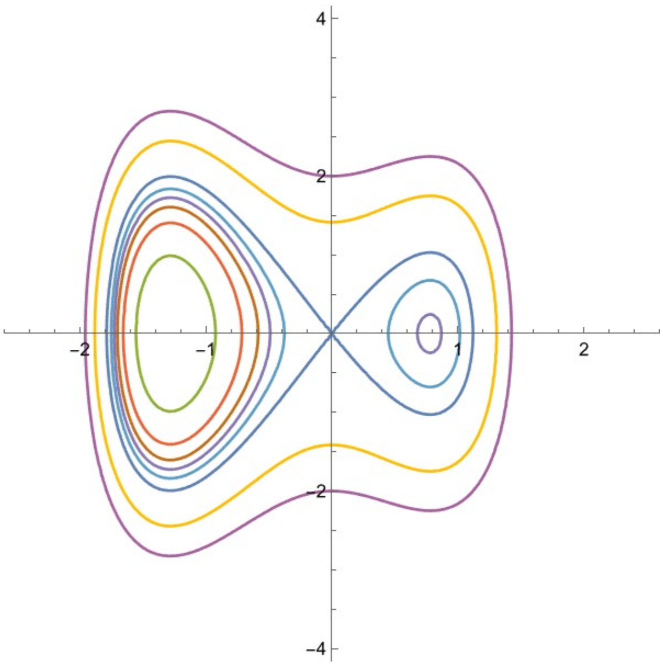
3. Si noti che $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = +\infty$, $V(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{1}{3}(-1-\sqrt{19})$ e $x \geq \frac{1}{3}(-1+\sqrt{19})$, $V(x) < 0$ per $\frac{1}{3}(-1-\sqrt{19}) < x < \frac{1}{3}(-1+\sqrt{19})$. Inoltre, $V'(x) = 0$ per $x = 0, \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17})$ (in particolare, $x = 0$ è un punto di massimo e $x = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17})$ sono punti di minimo) e $V''(x) = 0$ per $x = \frac{1}{6}(-1 \pm \sqrt{13})$.

   Il grafico dell'energia potenziale è pertanto il seguente:


   I punti di equilibrio del sistema sono $(0,0)$, che è instabile, e $\left(\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17}, 0\right)$, che sono stabili.

   Il moto nel piano delle fasi è dato da


   Dal grafico dell'energia potenziale segue che il moto è periodico se $E \neq 0$ e chiuso aperiodico se $E = 0$.

4. Il periodo del moto è dato da

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}$$

   per $E \neq 0$, dove $x_-$ e $x_+$ sono le soluzioni di $E = V(x)$.