Tutorato 4

FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)

Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica

Lezioni: Guido Gentile

Esercitazioni: Livia Corsi

Tutorato: Federico Manzoni, Michela Policella

21/03/2023

Costanti del moto e sistemi meccanici unidimensionali

Esercizio 1. Given the following dynamical systems

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -[1 - 2\sqrt{1-\cos(x)^2}] \end{cases}$,

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cosh(y) \\ \frac{dy}{dt} = \sinh(x) \end{cases}$

compute a conserved quantity.

Esercizio 2. Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza di energia potenziale

$$V(x) = -x^3 e^{-x^2}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico che descrive il moto.
2. Determinare una costante del moto.
3. Studiare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
4. Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
5. Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.

Esercizio 3. A body of unitary mass is subjected to the potential

$$V(q) = q^2 e^{-q^2}. \tag{1}$$

Write down the dynamical system associated to, study the potential energy and the equilibrium points. Study the energy level curves of the corresponding dynamic system, find a set of initial data such that the trajectory is periodic and estimate the period.

Esercizio 4. Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza di energia potenziale potenziale

$$V(x) = -\frac{7}{x} + \frac{7}{2x^2}.$$

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico che descrive il moto.
2. Determinare una costante del moto.
3. Studiare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
4. Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
5. Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.
6. Se esistono moti periodici, calcolarne il periodo in forma di integrale definito.
7. Se esistono moti illimitati, dire se il tempo per arrivare all'infinito è finito o no e se il moto esiste globalmente.

Esercizio 5. A body of unitary mass is subjected to the potential

$$V(q) = \frac{1}{8}(2q(q + 4\sinh(q) + \sinh(2q)) - 8\cosh(q) - \cosh(2q)). \tag{2}$$

Write down the dynamical system associated to the potential, study the potential energy and the equilibrium points. Study the energy level curves of the corresponding dynamic system, find a set of initial data such that the trajectory is periodic and estimate the period.

Soluzioni

Esercizio 1. For a first order system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \tag{3}$$

a scalar-valued function $H(x)$ is a conserved quantity of the system if, for all time and initial conditions in some specific domain $\frac{dH}{dt} = 0$. Using the multivariate chain rule

$$\frac{dH}{dt} = \nabla H \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla H \cdot f(x,t) \tag{4}$$

so that the definition may be written as

$$\nabla H \cdot f(x,t) = 0, \tag{5}$$

which contains information specific to the system and can be helpful in finding conserved quantities, or establishing whether or not a conserved quantity exists. If the system is conservative we know that a conserved quantity is the energy.

1. The system can be rewritten as

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -[1 - 2\sin(x)] \end{cases} \tag{6}$$

if $\sin(x) > 0$ or

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -[1 + 2\sin(x)] \end{cases} \tag{7}$$

if $sin(x) < 0$. The equation we need to solve is

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} 2y - \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}[1 \pm \sin(x)] = 0. \tag{8}$$

Let us search for $H(x,y) = X(x) + Y(y)$,

$$2yX' - [1 \pm \sin(x)]Y' = 0 \Rightarrow \frac{Y'}{2y} = \frac{X'}{1 \pm \sin(x)}; \tag{9}$$

since these are two function of different variables that are equal, they must be equal to the same constant (say one for simplicity)

$$\frac{Y'}{2y} = 1, \qquad \frac{X'}{1 \pm \sin(x)} = 1 \tag{10}$$

integrating we get

$$H(x,y) = X(x) + Y(y) = x \mp \cos(x) + y^2. \tag{11}$$

2. The equation we need to solve is

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \cosh(y) + \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \sinh(x) = 0. \tag{12}$$

Let us search for $H(x,y) = X(x) + Y(y)$,

$$\cosh(y)X' + \sinh(x)Y' = 0 \Rightarrow \frac{Y'}{\cosh(y)} = \frac{X'}{\sinh(x)}; \tag{13}$$

since these are two function of different variables that are equal, they must be equal to the same constant (say one for simplicity)

$$\frac{Y'}{\cosh(y)} = 1, \qquad \frac{X'}{\sinh(x)} = 1 \tag{14}$$

integrating we get

$$H(x,y) = X(x) + Y(y) = -\cosh(x) + \sinh(y). \tag{15}$$

Esercizio 2.

1. L'equazione del moto è data da

$$\ddot{x} = -V'(x) = -x^2 e^{-x^2}\left(-3 + 2x^2\right).$$

Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^2 e^{-x^2}\left(-3 + 2x^2\right) \end{cases}.$$

2. Poiché il sistema è conservativo, una costante del moto è data da

$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = \frac{y^2}{2} - x^3 e^{-x^2}.$$

3. Sappiamo che i punti di equilibrio del sistema sono dati da $(x_0, 0)$, dove x_0 sono i punti critici dell'energia potenziale $V(x)$.

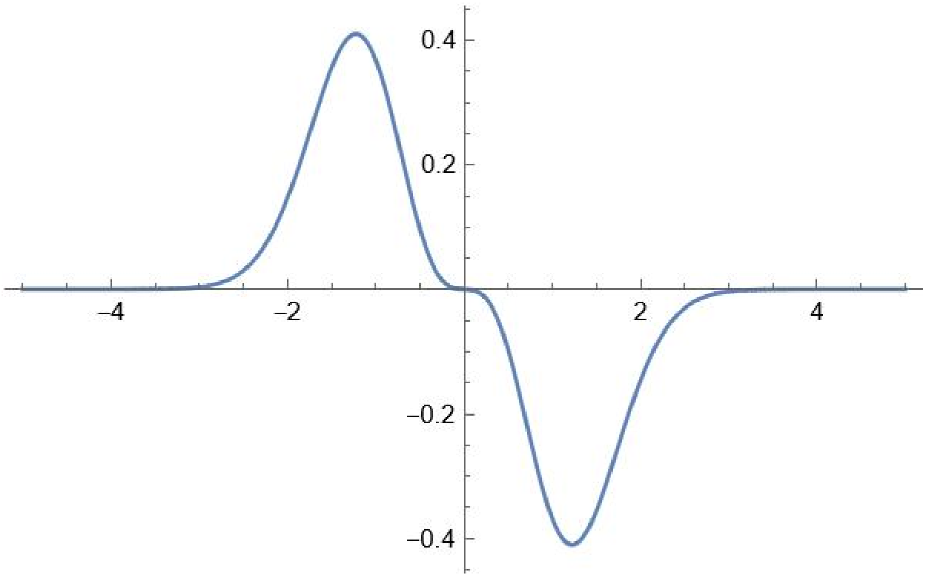
   I punti di equilibrio sono, pertanto,

$$P_1 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), \quad P_2 = (0,0), \quad P_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right).$$

   Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti di equilibrio stabili sono tutti e soli quelli della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo dell'energia potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $|x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$, mentre $V'(x) \leq 0$ per $|x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$, pertanto P_3 è stabile mentre P_1 e P_2 sono instabili.

4. Lo studio della derivata prima è stato fatto al punto precedente. L'unica intersezione con gli assi si ha in $(x,y) = (0,0)$ (in cui c'è un flesso a tangente orizzontale). Inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0^{\mp}$.

Un grafico qualitativo dell'energia potenziale $V(x)$ è pertanto dato da



5. Da $E = \frac{y^2}{2} + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò le curve nel piano delle fasi saranno simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre, il punto $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è un punto di minimo assoluto per il potenziale, pertanto il moto sarà possibile solo per $E \geq V\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

   Per $E = V\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ si ha il solo punto di equilibrio stabile P_3.

   Per $V\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) < E < 0$ si ha una traiettoria periodica intorno al punto di equilibrio stabile P_3.

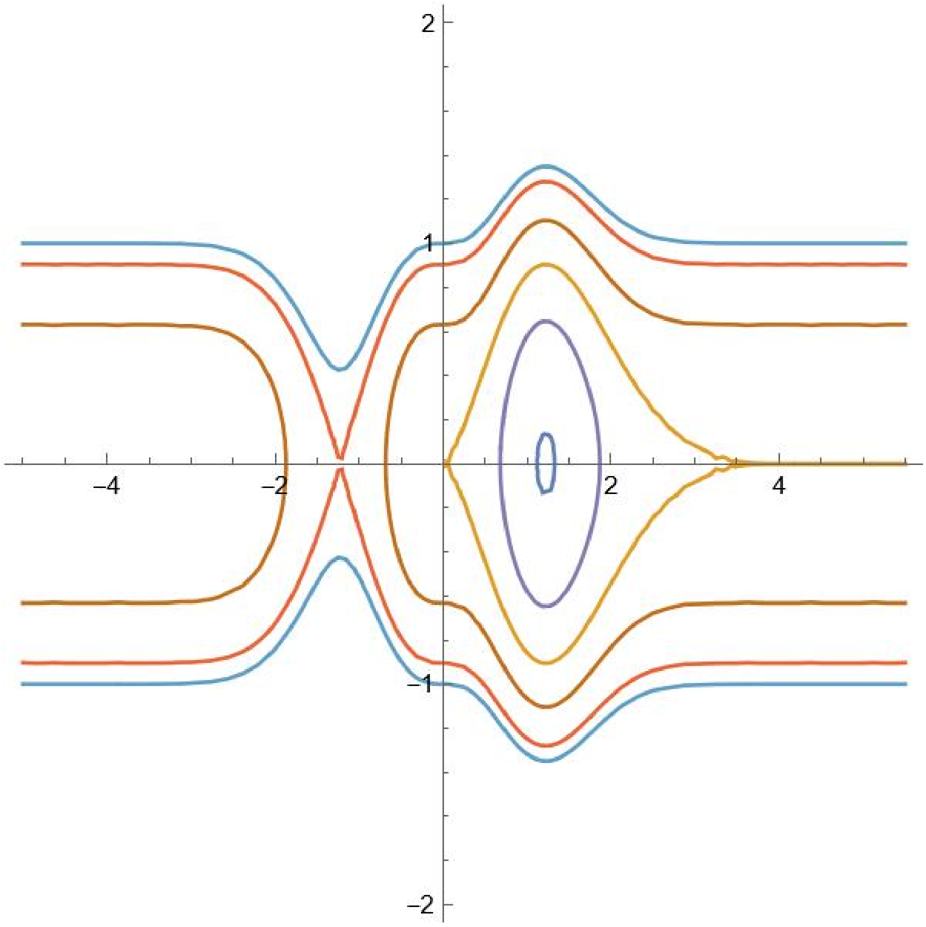
   Per $E = 0$ si hanno una traiettoria aperta con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0$ (cuspide) e il punto instabile P_2.

   Per $0 < E < V(-\sqrt{3}2)$ si hanno due traiettorie aperte, una con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed una con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

   Per $E = V(-\sqrt{3}2)$ si hanno due traiettorie aperte con $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, il punto di equilibrio instabile P_1 e due traiettorie aperte con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

   Per $E > V(-\sqrt{3}2)$ si hanno due traiettorie aperte, una con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \sqrt{2E}$ ed una con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -\sqrt{2E}$.

Il moto nel piano delle fasi è pertanto dato da



Esercizio 3. The dynamical system equations are given by the system

$$\begin{aligned} v &= \dot{q} \\ \dot{v} = -V'(q) = -2qe^{-q^2} + 2q^3e^{-q^2} &= 2e^{-q^2}q(q^2-1). \end{aligned} \tag{16}$$

The equilibrium point are in

$$V'(q) = 0 \Rightarrow 2e^{-q^2}q(q^2-1) = 0 \Rightarrow q = 0,\ q = \pm 1; \tag{17}$$

the sign of the first derivative

$$V'(q) > 0 \Rightarrow -2e^{-q^2}q(q^2-1) > 0 \tag{18}$$

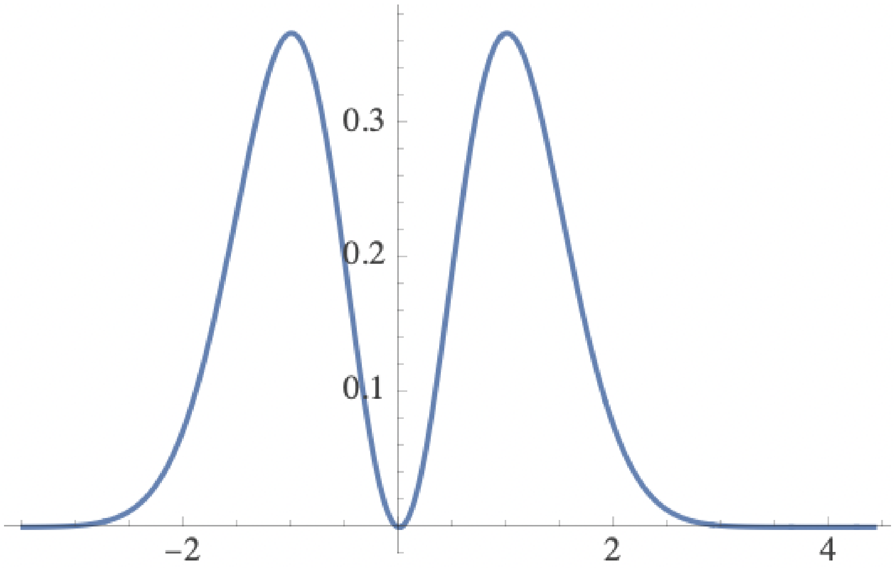
says that the function is increasing in the intervals $I_1 := (-\infty, -1)$ and $I_2 := (0, 1)$ and decreasing in $I_3 := (-1, 0)$ and $I_4 := (1, +\infty)$. Therefore $q = 0$ is a minimum, so it is a stable equilibrium point and $V(0) = 0$ while $q \pm 1$ are maximum points, they are so unstable equilibrium points and $V(\pm 1) = \frac{1}{e}$. Moreover

$$V(q) = 0 \Rightarrow q = 0 \tag{19}$$

and

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(q) = 0^+. \tag{20}$$

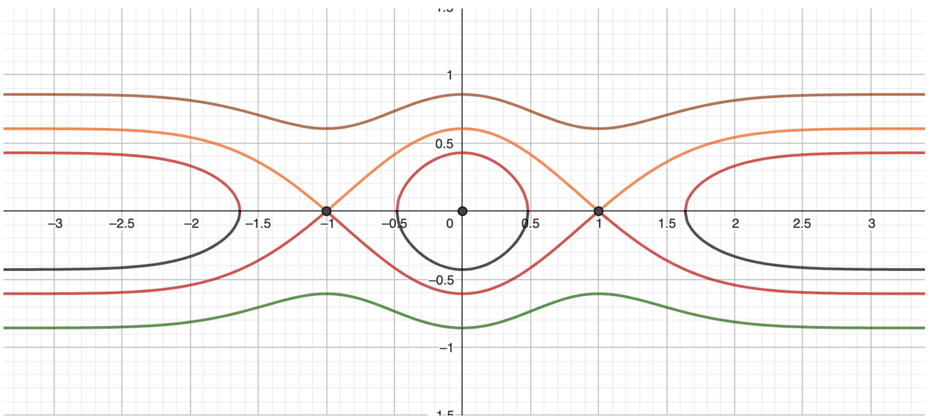
The plot of the potential is



From $E = \frac{v^2}{2} + V(q)$ we have

$$v(q) = \pm\sqrt{2(E - V(q))}. \tag{21}$$

which describe the curves on the phase space. Since the minimum is $V(0) = 0$, the motion is possible only for $E \geq 0$. For $E = V(0) = 0$ we have a fixed position in $(q, v) = (0, 0)$ and two open trajectories with $\lim_{q\to\pm\infty} v(q) = 0$. For $0 < E < \frac{1}{e}$ we have a periodic trajectory around the stable point $q = 0$ and two open trajectories with $\lim_{q\to\pm\infty} v(q) = \pm\sqrt{2E}$. For $E = \frac{1}{e}$ we have two fixed positions in $(q, v) = (\pm 1, 0)$ and two open trajectories with $\lim_{q\to\pm\infty} v(q) = \pm\sqrt{\frac{2}{e}}$, while for $E > \frac{1}{e}$ and two open trajectories with $\lim_{q\to\pm\infty} v(q) = \pm\sqrt{2E}$. The initial data $(q(0), v(0)) = (1, \sqrt{2(E - e^{-1})})$ with $0 < E < \frac{1}{e}$ are such that we remain on a periodic trajectory.



Esercizio 4. 1. L'equazione del moto è data da

$$\ddot{x} = -V'(x) = \frac{7(x-1)}{x^3}.$$

Ponendo $\dot{x} = y$ si ha che il sistema dinamico associato è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{5(x-1)}{x^3} \end{cases}.$$

2. Poiché il sistema è conservativo, una costante del moto è data da

$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = \frac{y^2}{2} - \frac{7}{x} + \frac{7}{2x^2}.$$

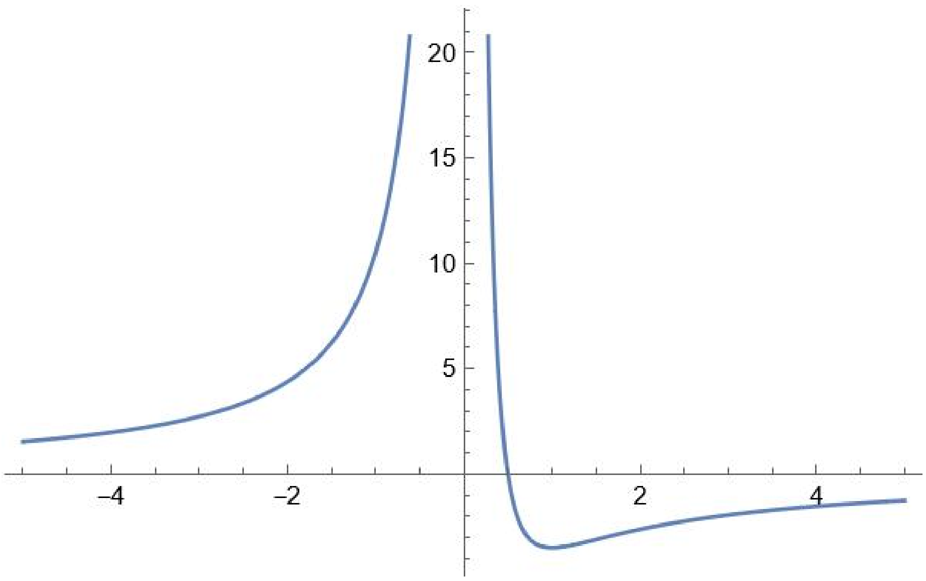
3. Sappiamo che i punti di equilibrio del sistema sono dati da $(x_0, 0)$, dove x_0 sono i punti critici dell'energia potenziale $V(x)$.

   L'unico punto di equilibrio è, pertanto, $P = (1, 0)$.

   Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti di equilibrio stabili sono tutti e soli quelli della forma $(x_0, 0)$ con $x_0$punto di minimo dell'energia potenziale $V(x)$. Ora, $V'(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > 1$, mentre $V'(x) < 0$ per $0 < x < 1$ (si osservi che $x = 0$ è un asintoto verticale per $V(x)$). Pertanto, il punto di equilibrio P è stabile.

4. Lo studio della derivata prima è stato fatto al punto precedente. L'unica intersezione con gli assi si ha in $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0^{\mp}$ e $\lim_{x\to 0^{\pm}} V(x) = \mp\infty$.

   Un grafico qualitativo dell'energia potenziale $V(x)$ è pertanto dato da



5. Da $E = \frac{y^2}{2} + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò le curve nel piano delle fasi saranno simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre, il punto $x = 1$ è un punto di minimo assoluto per il potenziale, pertanto il moto sarà possibile solo per $E \geq V(1)$.

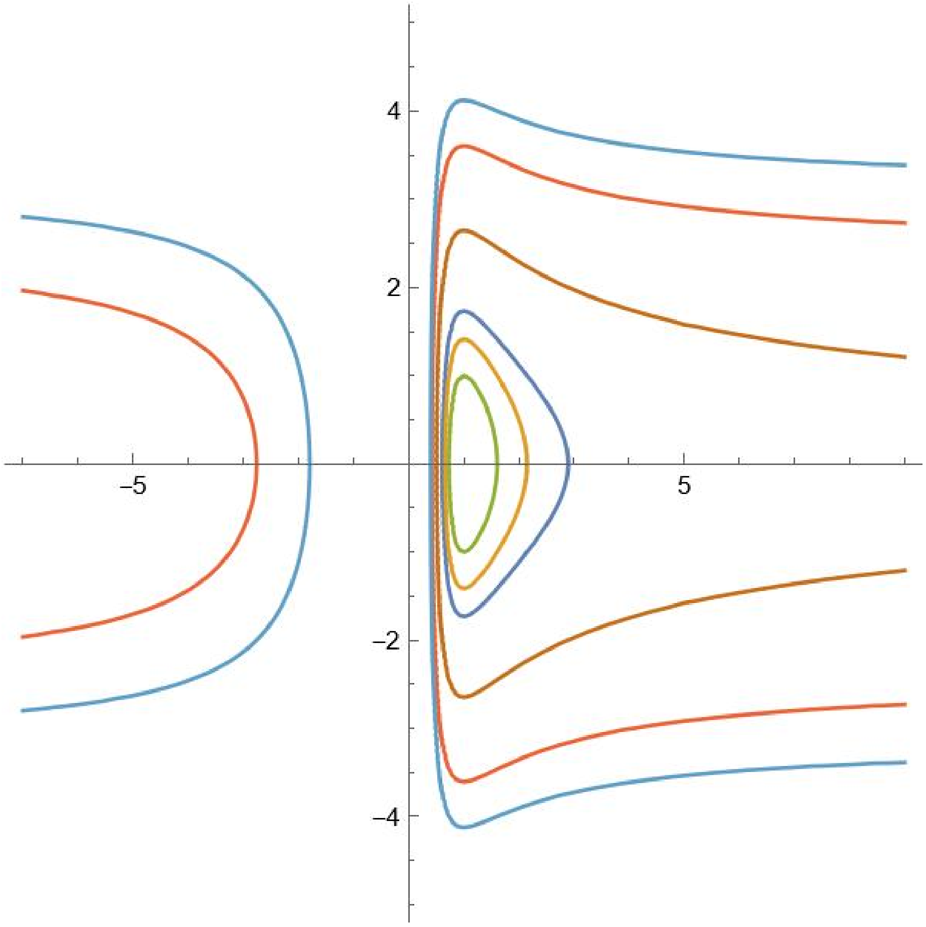
   Per $E = V(1)$ si ha il solo punto di equilibrio stabile P.

   Per $V(1) < E < 0$ si ha una traiettoria periodica intorno al punto di equilibrio stabile P.

Per $E = 0$ si ha una traiettoria aperta con $\lim_{x \to +\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.

Per $E > 0$ si hanno due traiettorie aperte, una con $\lim_{x \to +\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ ed una con $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \pm\infty$.

Il moto nel piano delle fasi è pertanto dato da



6. Il periodo del moto è dato da
$$T = \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - V(x)\right)}}$$
per $V(1) < E < 0$, dove x_- e x_+ sono le soluzionidi $E = V(x)$.

7. Fissato un dato iniziale $x(0)$, il tempo per arrivare all'infinito è dato da
$$t_\infty = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - V(x)\right)}} = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2E + \frac{7(2x-1}{x^2}}}$$
. Si ha che
$$\frac{1}{\sqrt{2E + \frac{7(2x-1}{x^2}}} \sim \sqrt{x}, \quad x \to +\infty.$$
Pertanto, l'integrale diverge all'infinito, $t_\infty = +\infty$ e il moto esiste globalmente.

Esercizio 5. Since we have

$$\begin{aligned} V'(q) &= \frac{1}{8}[4q + 8\sinh(q) + 8q\cosh(q) + 2\sinh(2q) + 4q\cosh(2q) - 8\sinh(q) - 2\sinh(2q)] = \\ &= q\left[\frac{1}{2} + \cosh(q) + \frac{1}{2}\cosh(2q)\right] = q[\cosh^2(q) + \cosh(q)] \end{aligned} \tag{22}$$

where we used $\cosh(2q) = 2\cosh^2(q) - 1$; the dynamical system equations are given by the system

$$\begin{cases} v = \dot{q} \\ \dot{v} = -V'(q) = -q[\cosh^2(q) + \cosh(q)]. \end{cases} \tag{23}$$

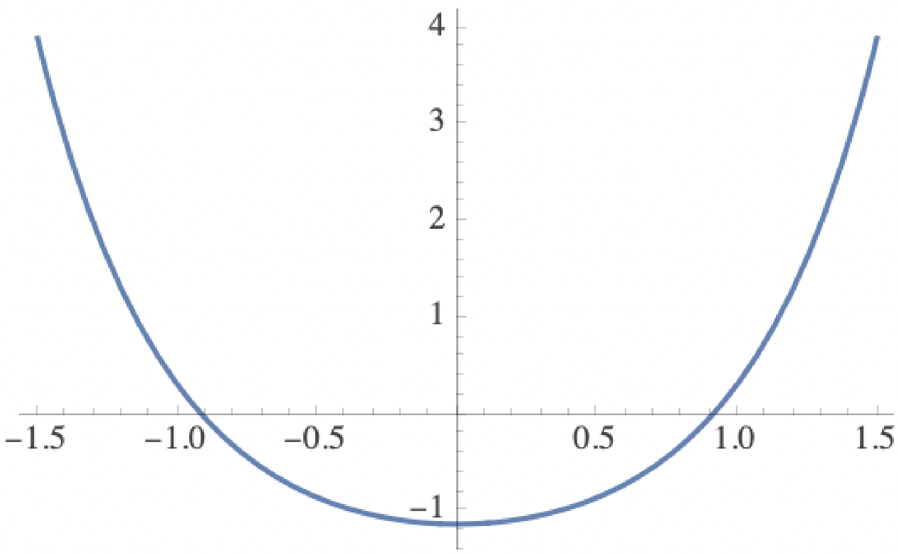
The equilibrium points are in

$$V'(q) = 0 \Rightarrow q[\cosh^2(q) + \cosh(q)] = 0 \Rightarrow q = 0 \tag{24}$$

since $\cosh^2(q) + \cosh(q) = 0$ has no real solutions. The sign of the first derivative tells us that the function is decreasing in $I_1 := (-\infty, 0)$ and increasing in $I_2 := (0, +\infty)$; the point $q = 0$ is a minimum ans so a stable equilibrium point. We have $V(0) = -\frac{9}{8}$ and

$$\lim_{q \to \pm\infty} = +\infty. \tag{25}$$

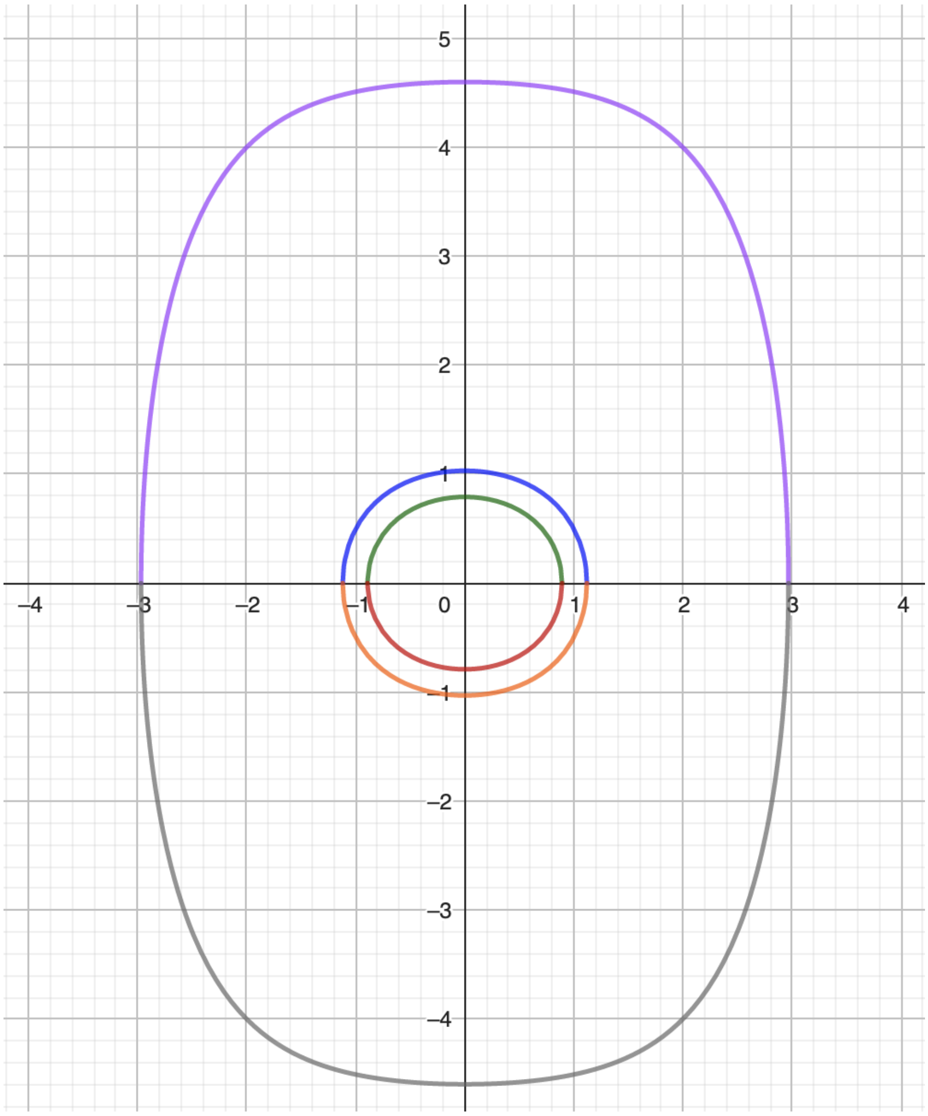
The plot is



From $E = \frac{v^2}{2} + V(q)$ we have

$$v(q) = \pm\sqrt{2(E - V(q))}. \tag{26}$$

which describe the curves on the phase space. Since the minimum is $V(0) = -\frac{9}{8}$, the motion is possible only for $E \geq -\frac{9}{8}$. For $E = -\frac{9}{8}$ we have fixed position in $(0, 0)$; for $E \geq -\frac{9}{8}$ we have periodic trajectories around the stable point $q = 0$. Any set of date excluding $(0, 0)$ is such that it has periodic trajectories.


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4