
Tutorato 5
FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)
Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica

LEZIONI: Guido Gentile

ESERCITAZIONI: Livia Corsi

TUTORATO: Federico Manzoni, Michela Policella

28/03/2023

Sistemi meccanici unidimensionali e moti centrali

Esercizio 1. Given the following radial central field acting on a particle of mass M

1. $F(\mathbf{r}) = -\frac{GM\rho}{(\rho^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathbf{r}}{\rho}$, $\rho = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$;

2. $F(\mathbf{r}) = -\frac{GM\rho}{[b+(b^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}]^2(b^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathbf{r}}{\rho}$, $\rho = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$;

where b is a positive constant, find the effective potential energy

Esercizio 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = x + 2 \sin x.$$

1. Si determini l'energia del sistema e se ne verifichi la conservazione.
2. A partire dal grafico dell'energia potenziale, si determinino eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
3. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi e si discuta la natura del moto al variare dell'energia.

Esercizio 3. A body of mass m is subject to a central force

$$F(\mathbf{r}) = (A\rho - B)\frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \rho = |\mathbf{r}|, \quad A, B > 0. \quad (1)$$

Let be L the component of the angular momentum orthogonal to the plane of motion, we assume it satisfies the relation

$$L^2 < m(-A\bar{\rho}^4 + B\bar{\rho}^3) \quad (2)$$

for a particular value $\bar{\rho} > 0$.

- Show that there are two values ρ_1 and ρ_2 , with $\rho_1 < \rho_2$, which correspond to two circular orbits;
- find the period T of the circular orbit for $L = 2\frac{kgm^2}{s}$, $m = 1kg$, $A = -1\frac{J}{m^2}$ and $B = 0\frac{J}{m}$.

Esercizio 4. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = -2(x+2)(2x^2 + 2x - 1).$$

1. Si determini una costante del moto.
2. A partire dal grafico dell'energia potenziale, si determinino eventuali punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
3. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi e si discuta la natura del moto al variare dell'energia.
4. Si determinino eventuali orbite periodiche e se ne calcoli il periodo come integrale definito.
5. Si determinino eventuali orbite limitate ma non periodiche.

Esercizio 5. A body of unit mass is subject to a central force

$$F(\mathbf{r}) = -2\left(\frac{\alpha}{\rho^3} + \rho\right)\frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \rho = |\mathbf{r}|, \quad \alpha > 0. \quad (3)$$

- State for which values of α and L (the component of the angular momentum orthogonal to the plane of motion) stable circular trajectories exist in the plane of motion;
- in the case where $\alpha = 1Jm^2$ and $L = 4\frac{kgm^2}{s}$, compute the returning points of the motion of ρ as a function of the value E of the total energy;
- Study the phase portrait in the plane $(\rho, \dot{\rho})$ in function of α and L^2 .

Soluzioni

Esercizio 1. The effective potential energy is given by

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2M\rho^2} = - \int f(\rho)d\rho + \frac{L^2}{2M\rho^2} \quad (4)$$

where $f(\rho)$ is the function of ρ in front of the factor $\frac{r}{\rho}$. The circular orbits are the critical values of the effective potential. The velocity of the particle

1. This force modelling is know as Plummer model; it is used in astrophysics to fit the globular cluster observations.

We have

$$V_{eff}(\rho) = GM \int \frac{\rho}{(\rho^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{L^2}{2M\rho^2} = - \frac{GM}{(\rho^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L^2}{2M\rho^2}. \quad (5)$$

2. This force modelling is know as isocrone model; it is used in galactic astrophysics because turns out to be the only known model that could be generated by a realistic stellar system.

We have

$$V_{eff}(\rho) = GM \int \frac{\rho}{[b + (b^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}]^2 (b^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L^2}{2M\rho^2} = - \frac{GM}{b + (\rho^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L^2}{2M\rho^2}. \quad (6)$$

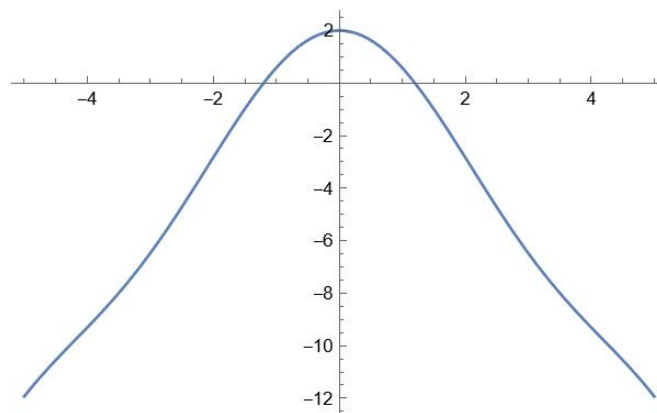
Esercizio 2. 1. Il sistema è conservativo, con energia potenziale $V(x)$ tale che $V'(x) = -x - 2 \sin x$. Pertanto, l'energia meccanica

$$E(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 2 \cos x$$

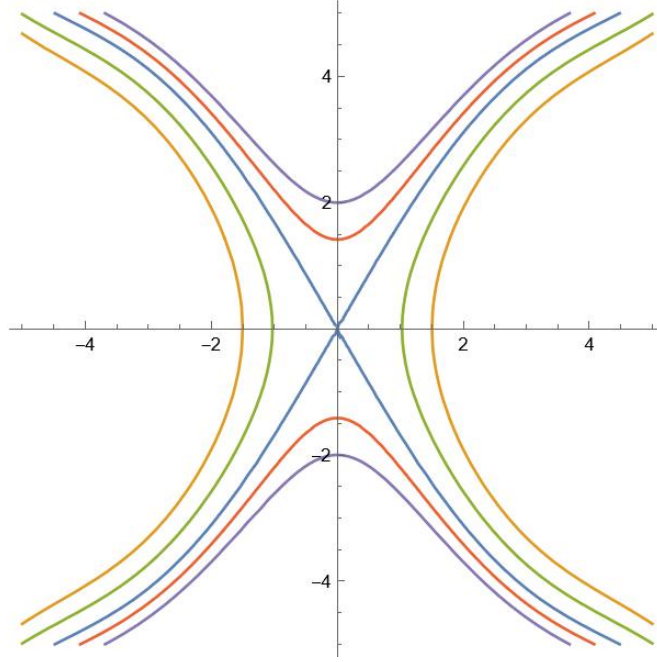
si conserva, come si può vedere derivando rispetto al tempo.

2. Il potenziale è pari ed ha un solo punto critico in $x = 0$. Il sistema ammette, pertanto, un unico punto di equilibrio $P = (0, 0)$, che è instabile in quanto punto di massimo dell'energia potenziale.

Un grafico qualitativo dell'energia potenziale è il seguente:



3. A partire dal grafico dell'energia potenziale si ha che le curve di livello al variare dell'energia E sono quelle riportate di seguito:



Oltre al moto banale $x(t) \equiv 0$, il sistema ammette solamente moti illimitati che tendono a $\pm\infty$ nel futuro o nel passato al variare dei livelli di energia. In particolare:

- Se $E < V(0)$ e $x(0) < 0$, il moto tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro;
- Se $E < V(0)$ e $x(0) > 0$, il moto tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro;
- Se $E = V(0)$ e $x(0) < 0$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a $x = 0$ nel futuro o viceversa;
- Se $E = V(0)$ e $x(0) > 0$, il moto tende a $+\infty$ nel passato e a $x = 0$ nel futuro o viceversa;
- Se $E > V(0)$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a $+\infty$ nel futuro o viceversa.

Si noti che il sistema non ammette moti periodici. Inoltre, tutti i moti del sistema sono globali nel tempo. Il tempo per arrivare all'infinito, infatti, è infinito, poiché $V(x) \sim -\frac{x^2}{2}$ e quindi $\frac{1}{\sqrt{2(E-V(x))}} \sim |x|^{-1}$, che non è integrabile all'infinito.

Esercizio 3. As known, every central field is conservative, the potential energy is given by

$$V(\rho) = - \int f(\rho) d\rho = -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho \quad (7)$$

where $f(\rho) = A\rho - B$; therefore the effective potential energy is

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho + \frac{L^2}{2m\rho^2} \quad (8)$$

where the second term is give rise to the centrifugal force. The circular trajectories are identified by the critical points of the effective potential,

$$V'_{eff}(\rho) = -A\rho + B - \frac{c^2}{2m\rho^3} = \frac{1}{m\rho^3}(-mA\rho^4 + mB\rho^3 - L^2) = 0 \Rightarrow -mA\rho^4 + mB\rho^3 - L^2 = 0. \quad (9)$$

Thanks to the Descartes' rule of signs (if the non-zero terms of a single-variable polynomial with real coefficients are ordered by descending variable exponent, then the number of positive roots of the polynomial is either equal to the number of sign changes between consecutive non-zero coefficients, or is less

than it by an even number. A root of multiplicity k is counted as k roots.) we can conclude that, since there are two sign changes, there are zero or two positive roots. Since the polynomial satisfy

$$p(0) = -L^2 < 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty \quad (10)$$

but also that exist a value $\bar{\rho}$ such that

$$p(\bar{\rho}) > 0, \quad (11)$$

we conclude there exist two positive roots ρ_1 and ρ_2 .

From the given data, the first derivative of the effective potential reduces to

$$V'_{eff}(\rho) = \rho^4 - 4 \quad (12)$$

so we have only one circular orbit with radius $\rho = \sqrt{2}$; the period is given by

$$T = 2\pi \frac{m\rho^2}{L} = 2\pi \quad (13)$$

this equation derives from integration of the angular equation $\dot{\vartheta} = \frac{L}{m\rho^2}$ (deriving from the fact of orienting the system in which the axis z is oriented along the angular momentum vector) recalling that a critical point ρ_{crit} of the effective potential is an equilibrium point of the radial effective equation $m\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho}$ and the solution is $\rho(t) = \rho_{crit}$.

Esercizio 4. 1. Il sistema è conservativo, con energia potenziale $V(x)$ tale che $V'(x) = 2(x+2)(2x^2+2x-1)$. Pertanto, l'energia meccanica

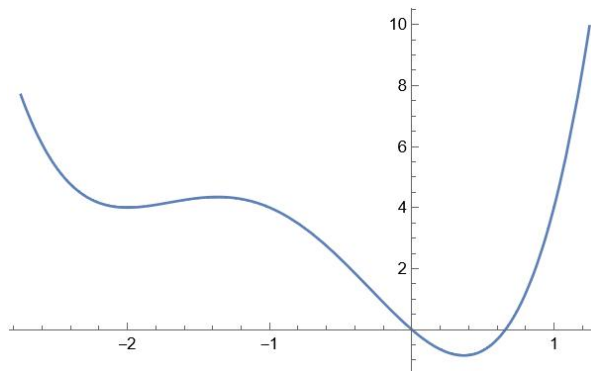
$$E(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x$$

è una costante del moto.

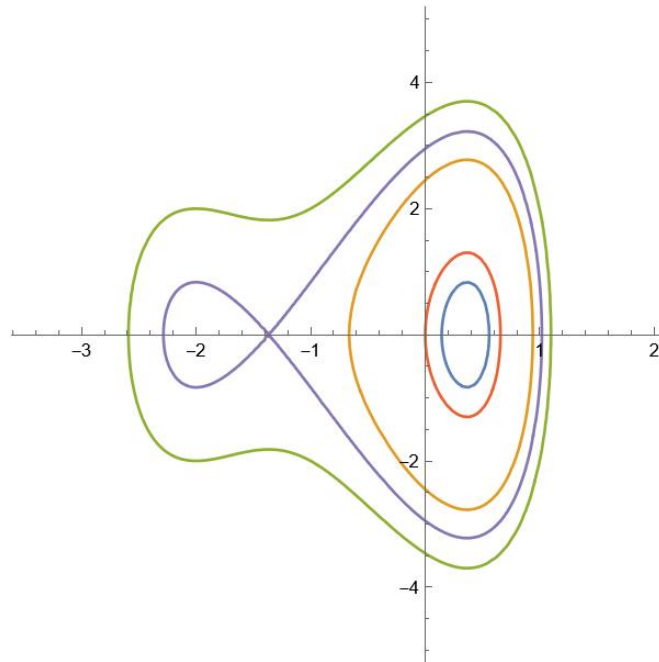
2. I punti critici del potenziale sono $x = -2$, $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, pertanto i punti di equilibrio del sistema sono $P_1 = (-2, 0)$, $P_2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ e $P_3 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Inoltre, si ha che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = +\infty$ e che $V'(x) > 0$ per $-2 < x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e per $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Si ha, pertanto, che P_1 e P_3 sono stabili, in quanto corrispondono a punti di minimo del potenziale, mentre P_2 è instabile, in quanto corrisponde ad un punto di massimo del potenziale.

Infine, notiamo che $V(0) = 0$.

Un grafico qualitativo dell'energia potenziale è il seguente:



3. A partire dal grafico dell'energia potenziale si ha che le curve di livello al variare dell'energia E sono quelle riportate di seguito:



In particolare:

- Per $E = V\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ si ha una sola traiettoria che rimane ferma nel punto P_3 per tutti i tempi;
 - Per $V\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) < E < V(-2)$ ci sono orbite periodiche intorno al punto P_1 ;
 - Per $E = V(-2)$ si hanno una traiettoria che rimane ferma nel punto P_1 ed un'orbita periodica intorno al punto P_3 ;
 - Per $V(-2) < E < V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ ci sono orbite periodiche intorno ai punti P_1 e P_3 ;
 - Per $E = V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ ci sono una traiettoria che rimane ferma nel punto P_2 e due traiettorie che partono dal punto P_2 , una verso destra e una verso sinistra, e ritornano nel punto P_2 in tempi infiniti, girando intorno ai punti di equilibrio stabili;
 - Per $E > V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ ci sono orbite periodiche che girano intorno ai punti di equilibrio.
4. Per tutte le orbite che si ottengono da valori $E \neq V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$, si ha che il periodo è dato da

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - (x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x))}}$$

dove x_- e x_+ sono le soluzioni di $E = V(x)$.

5. Per $E = V\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ si hanno orbite limitate ma non periodiche, ad eccezione di quella che rimane ferma nel punto instabile per tutti i tempi.

Esercizio 5. As known, every central field is conservative, the potential energy is given by

$$V(\rho) = - \int f(\rho) d\rho = -\frac{\alpha}{\rho^2} + \rho^2 \quad (14)$$

where $f(\rho) = 2(\frac{\alpha}{\rho^3} + \rho)$; therefore the effective potential energy is

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2} + \rho^2 + \frac{L^2}{2\rho^2} = \rho^2 + \frac{L^2 - 2\alpha}{2\rho^2} \quad (15)$$

where the second term is give rise to the centrifugal force. The circular trajectories are identified by the critical points of the effective potential,

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{2\alpha - L^2}{\rho^3} + 2\rho = 0 \Rightarrow \rho = \sqrt[4]{\frac{L^2 - 2\alpha}{2}} := \bar{\rho}. \quad (16)$$

Circular orbits exist only if $L^2 - 2\alpha > 0$, moreover if $L^2 - 2\alpha > 0$ we have $V''_{eff}(\bar{\rho}) > 0$; therefore the critical point is a minimum and so the circular orbit with radius $\bar{\rho}$ is a stable orbit.

Indicating with E the constant value of the total energy, the inversion points of the radial motion are defined by the relation

$$E - V_{eff}(\rho) = 0 \Rightarrow E = \rho^2 + \frac{L^2 - 2\alpha}{2\rho^2}; \quad (17)$$

with the give date we get

$$E = \rho^2 + \frac{7}{\rho^2} \Rightarrow \rho^4 - \rho^2 E + 7 = 0. \quad (18)$$

The turning points are than the positive roots

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{E + \sqrt{E^2 + 28}}{2}}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{E - \sqrt{E^2 + 28}}{2}}. \quad (19)$$

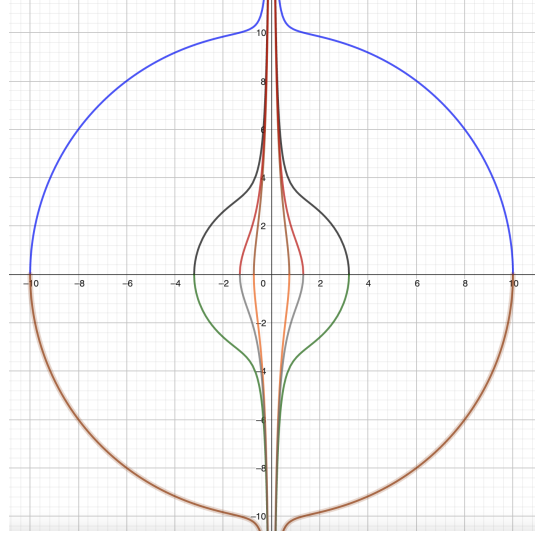
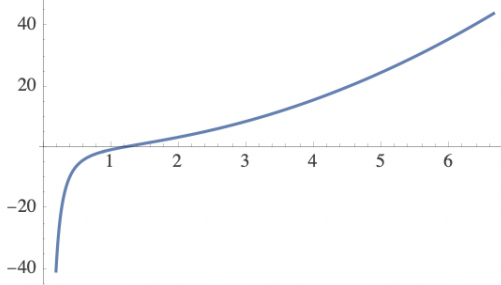
For $2\alpha - L^2 > 0$ we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff} = -\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff} = +\infty \quad (20)$$

and no critical points. From $E = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{eff}(\rho)$ we have

$$\dot{\rho}(\rho) = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}. \quad (21)$$

which describe the curves on the phase space. The energy can take any real value and for all values of energy there are only open orbits. The plot of the effective potential energy and of the phase space for $\alpha = 2Jm^2$ and $L = 1\frac{kgm^2}{s}$ are (recall we are interested only in the I and IV sectors since $\rho \in \mathbb{R}^+$)



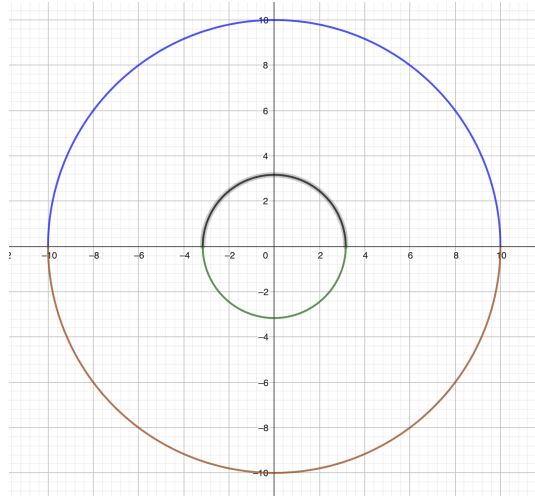
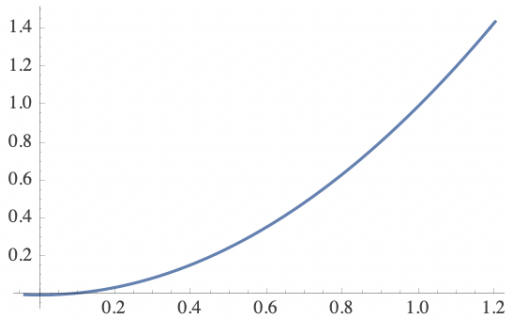
For $2\alpha - L^2 = 0$ we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff} = +\infty \quad (22)$$

and no critical points since $\rho > 0$. From $E = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{eff}(\rho)$ we have

$$\dot{\rho}(\rho) = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}. \quad (23)$$

which describe the curves on the phase space. The energy can take only values strictly greater than zero; for all values of energy there are only closed orbits. The plot of the effective potential energy and of the phase space are (recall we are interested only in the I and IV sectors since $\rho \in \mathbb{R}^+$)



For $2\alpha - L^2 < 0$ we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff} = -\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff} = +\infty \quad (24)$$

and a critical point in $\bar{\rho} = \sqrt[4]{\frac{L^2 - 2\alpha}{2}}$. From $E = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + V_{eff}(\rho)$ we have

$$\dot{\rho}(\rho) = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}. \quad (25)$$

which describe the curves on the phase space. The energy can take only values greater than $V(\bar{\rho})$; for all values of energy there are only closed orbits. The plot of the effective potential energy and of the phase space for $\alpha = 2Jm^2$ and $L = 5\frac{kgm^2}{s}$ are (recall we are interested only in the I and IV sectors since $\rho \in \mathbb{R}^+$)

