Tutorato 6
FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)
Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Lezioni: Guido Gentile
Esercitazioni: Livia Corsi
Tutorato: Federico Manzoni, Michela Policella

04/04/2023

Moti centrali e moti relativi

Esercizio 1. Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico tridimensionale ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$) costituito da due particelle di massa m dato da

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = -2\alpha\left(1-2|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^4\right)(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -2\alpha\left(1-2|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^4\right)(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1) \end{cases}$$

con $m, \alpha > 0$, cioè:

1. Si decomponga il moto complessivo in moto del centro di massa più moto nella coordinata relativa e si studi qualitativamente il moto nella coordinata relativa.

2. Si trovino le costanti del moto del moto relativo.

3. Si disegni il grafico del potenziale efficace al variare del momento angolare, si disegnino le orbite nel piano della fasi $(\rho, \dot{\rho})$ e si discutano le proprietà qualitative risultanti del moto radiale e del moto complessivo. In particolare:

   (i) Per $L = 0$ si dica per quali valori dell'energia il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico.

   (ii) Per $0 < L^2 < \frac{m\alpha}{12}$ si trovino le condizioni sotto cui il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico.

   (iii) Per $L^2 = \frac{m\alpha}{12}$ si trovi un moto complessivo periodico nella coordinata relativa.

   (iv) Per $L^2 > \frac{m\alpha}{12}$ si dimostri che tutte le orbite sono aperte.

Esercizio 2. Let $Oxyz$ the absolute frame and $O'\chi\upsilon\zeta$ the relative one. Given the rigid transformation

$$D_t : O'\chi\upsilon\zeta \to Oxyz$$

such that

$$\begin{cases} x = \cos(2\alpha(t))\cos(\beta(t))\chi - \cos(2\alpha(t))\sin(\beta(t))\upsilon + \sin(2\alpha(t))\zeta + t \\ y = \sin(\beta(t))\chi + \cos(\beta(t))\upsilon + 2t \\ z = -\sin(2\alpha(t))\cos(\beta(t))\chi + \sin(2\alpha(t))\sin(\beta(t))\upsilon + \cos(2\alpha(t))\zeta + 3t \end{cases} .$$

Find the translational and the rotational part of the rigid transformation and show that the rotational part belongs to $SO(3)$. Given a body in the frame $O'\chi\upsilon\zeta$ that moves with the law $\boldsymbol{Q}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, find the law in the frame $Oxyz$ and compute the drag velocity and the inertial forces acting on the body in the case $\alpha(t) = 0$.

Esercizio 3. Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log\left(\frac{3\rho^2 + 2}{2\rho}\right).$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Studiare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

Esercizio 4. In a vertical plane, fix a reference frame Oxy with vertical ascending axis Oy. In this plane, consider another frame $O\chi\upsilon$, which rotates around the origin with constant angular velocity. In the same plane a rod AC of mass m and length $2l$ can move, with the end point A hinged at the origin O. The force of gravity also acts on the system. Using as coordinate the angle ϑ that the rod forms with the direction of $O\upsilon$ find the resultant of the forces acting on the rod in the reference $O\chi\upsilon$.

Soluzioni

Esercizio 1. Il sistema è costituito da due punti materiali di massa $m_1 = m_2 = m$ che interagiscono attraverso una forza centrale (i.e. tale che soddisfi il terzo principio della dinamica, dipenda solo dal modulo della differenza dei vettori posizione dei due punti, sia diretta lungo la retta congiungente i due punti). Le equazioni del moto sono dunque descritte dal seguente sistema:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}F(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|) \\ m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}F(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|) \end{cases}$$

dove $F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -2\alpha|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\left(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4\right)$.

Sotto queste ipotesi, se introduciamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{x}_1+m_2\mathbf{x}_2}{m_1+m_2} \\ \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

dove $\mathbf{R}$ è la coordinata del centro di massa e $\mathbf{r}$ è la coordinata relativa, abbiamo che, nelle nuove variabili, le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}} = 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}F(|\mathbf{r}|) \end{cases}$$

dove $\mu = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})^{-1}$ è la massa ridotta.

La prima equazione è l'equazione del moto del centro di massa, che risulta essere rettilineo uniforme.

Ci concentreremo sullo studio della seconda equazione.

Sappiamo che le forze centrali sono conservative, pertanto esiste una funzione V tale che

$$F(\mathbf{r}) = -V'(\mathbf{r}).$$

Nel nostro caso, $F(\mathbf{r}) = -2\alpha\mathbf{r}(1 - 3\mathbf{r}^4)$, pertanto $V(\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{r}^2 - \alpha\mathbf{r}^6$. Dalla teoria sappiamo che se il momento angolare $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ il moto si svolge su un piano ortogonale a $\mathbf{L}$. Scegliamo quindi un sistema di coordinate in cui l'asse z è diretto lungo la direzione del vettore momento angolare, in modo tale da poter scrivere $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$, così da ridurre il sistema ad un'equazione a due gradi di libertà.

Introduciamo quindi un nuovo cambiamento di variabili

$$\begin{cases} r_1 = \rho\cos\vartheta \\ r_2 = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

in modo tale che nelle coordinate polari (ρ, ϑ) il sistema si possa scrivere come

$$\begin{cases} \mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} \\ \dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu\rho^2} \end{cases}.$$

Per la conservazione del momento angolare, la seconda equazione si può risolvere facilmente se si conosce $\rho(t)$.

La prima equazione, invece, può essere considerata come l'equazione di un punto materiale di massa μ che si muove sulla semiretta $\mathbb{R}_+$. Lo studio è quindi equivalente a quello di un moto unidimensionale con energia potenziale $V_{eff}(\rho)$ data dalla somma tra energia potenziale originaria $V(\rho)$ ed energia potenziale centrifuga $\frac{L^2}{2\mu\rho^2}$. Dobbiamo studiare, pertanto, l'equazione

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho}$$

dove $V_{eff}(\rho) = \alpha\rho^2 - \alpha\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$ al variare di $\alpha, \mu > 0$ e $L \geq 0$.

Le costanti del moto sono l'energia totale del sistema e il momento angolare.

Dobbiamo ora distinguere il caso $L = 0$ da quello $L > 0$.

- $L = 0$: In questo caso il moto avviene su una retta e perciò dobbiamo studiare

$$V_{eff}(\rho) = \alpha\rho^2 - \alpha\rho^6$$

per $\rho \in \mathbb{R}_+$.

Si ha che $\lim_{\rho\to+\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty$ e che $V'_{eff}(\rho) > 0$ per $0 < \rho < \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Quindi $\rho_1 = 0$ è un punto di minimo per il potenziale e dunque punto di equilibrio stabile per il sistema, $\rho_2 = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ è un puntio di massimo per il potenziale e dunque punto di equilibrio instabile per il sistema.

Si hanno traiettorie periodiche in corrispondenza dei punti di equilibrio e per valori di energia $V_{eff}(0) < E < V_{eff}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$.

- $L > 0$: Si ha che $\lim_{\rho\to 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty$ e che $\lim_{\rho\to+\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty$.

Inoltre,

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{2\mu\alpha\rho^4 - 6\mu\alpha\rho^8 - L^2}{\mu\rho^3}.$$

Pertanto, con la sostituzione $t = \rho^4$ otteniamo che $V'_{eff}(\rho) = 0$ per

$$-6\mu\alpha t^2 + 2\mu\alpha t - L^2 = 0,$$

che ha come radici

$$t_{1,2} = \frac{\mu\alpha \pm \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}.$$

Quindi il potenziale avrà $0, 1, 2$ punti critici a seconda che $\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2$ sia maggiore, minore o uguale a 0.

(a) $\mu^2\alpha^1 - 6\mu\alpha L^2 > 0 \Rightarrow L^2 < \frac{\mu\alpha}{6}$: La derivata si annulla in 4 punti:

$$\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{\mu\alpha + \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}},\ \rho_2 = -\sqrt[4]{\frac{\mu\alpha + \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}},$$

$$\rho_3 = \sqrt[4]{\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}},\ \rho_4 = -\sqrt[4]{\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}}.$$

Ovviamente, ρ_2 e ρ_4 devono essere scartati in quanto negativi mentre ρ_1 è ben definito. Per quanto riguarda ρ_3, dobbiamo verificare se la quantità sotto radice quarta sia positiva:

$$\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha}$$

e, poiché $\sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2} < \mu\alpha$, si ha che

$$\frac{\mu\alpha - \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 6\mu\alpha L^2}}{6\mu\alpha} > 0.$$

Come si può vedere dallo studio del segno di $V'_{eff}(\rho)$, si ha che ρ_1 è un punto di massimo per il potenziale e dunque punto di equilibrio instabile per il sistema, mentre ρ_3 è un punto di minimo per il potenziale e dunque punto di equilibrio stabile per il sistema.

(b) $\mu^2\alpha^1 - 6\mu\alpha L^2 = 0 \Rightarrow L^2 = \frac{\mu\alpha}{6}$: La derivata si annulla nel solo punto $\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.
Per studiare la natura del punto critico, notiamo che

$$V"_{eff}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{6}}\right) = 0$$

e pertanto il punto ρ_1 è un flesso a tangente orizzontale e dunque punto di equilibrio instabile per il sistema.

(c) $\mu^2\alpha^1 - 6\mu\alpha L^2 < 0 \Rightarrow L^2 > \frac{\mu\alpha}{6}$: La derivata del potenziale non si annulla in nessun punto.

Pertanto, nell'ultimo caso si ha che tutte le orbite sono aperte, mentre nei casi precedenti il moto complesivo nella coordinata relativa è periodico in corrispondenza dei punti di equilibrio per la variabile radiale, oppure quando il moto per la variabile radiale è periodico e la variazione della variabile angolare è commensurabile con 2π, cioè se esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $\int_0^T \frac{L}{\rho^2(t)}\, dt = 2\pi q$, dove T indica il periodo della variabile radiale.

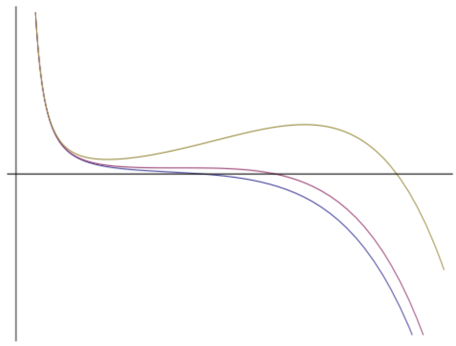


Figura 1: *Potenziale efficace al variare di $L > 0$, per $L < \frac{\mu\alpha}{6}$ (blu), $L = \frac{\mu\alpha}{6}$ (viola), $L > \frac{\mu\alpha}{6}$ (giallo).*

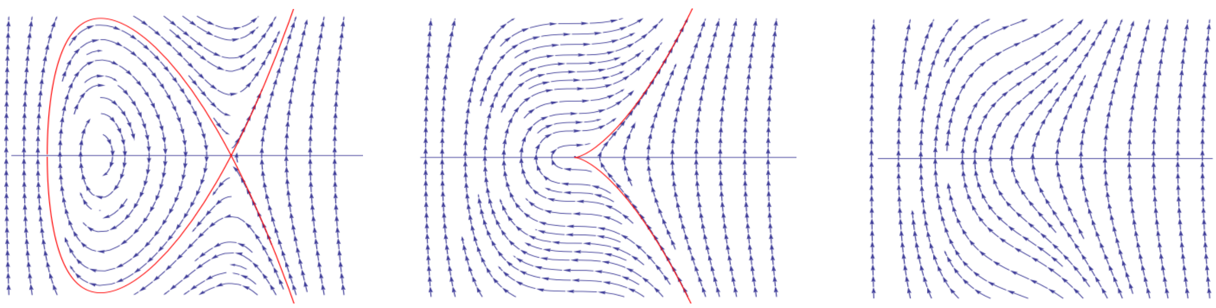


Figura 2: *Orbite nei casi (a),(b),(c).*

Esercizio 2. We know that every rigid transformation from a relative to an absolute frame can be decomposed in a unique way, due to Mozzi theorem, in a rotation R_t belonging to $SO(3)$ and a translation C_t. Moreover, Let us use the notation $\boldsymbol{q}(t)$ and $\boldsymbol{Q}(t)$ for the vectors identifying the point P, respectively, in the absolute frame and in the relative one; so that $\boldsymbol{q}(t) = D_t\boldsymbol{Q}(t) = R_t\boldsymbol{Q}(t) + \boldsymbol{r}(t)$. The absolute velocity is

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{q}}(t)$$

while the relative one is

$$\boldsymbol{v}' = R_t\dot{\boldsymbol{Q}}(t)$$

and we have

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_T + \boldsymbol{v}_0$$

where

$$\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{v}_T = \dot{R}_t\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{r}(t)).$$

are the translational velocity and the rotational one, respectively. If in the absolute frame the Newton equations are

$$m\ddot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{f}$$

than in the relative frame (moving of rototranslational motion with respect to the absolute frame) the Newton equation reads

$$m\ddot{\boldsymbol{Q}}(t) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_T + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_0$$

where

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= R_t^{-1}\boldsymbol{f};\\
\boldsymbol{F}_T &= -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{Q};\\
\boldsymbol{F}_C &= -2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{Q}};\\
\boldsymbol{F}_c &= -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q});\\
\boldsymbol{F}_0 &= -mR^{-1}\ddot{\boldsymbol{r}};
\end{aligned}$$

with

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = R_t^{-1}\boldsymbol{\omega}(t).$$

The rigid transformation D_t can be decomposed as

$$D_t = C_t \circ R_t$$

where

$$C_t = (t, 2t, 3t), \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha(t))\cos(\beta(t)) & -\cos(2\alpha(t))\sin(\beta(t)) & \sin(2\alpha(t)) \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ -\sin(2\alpha(t))\cos(\beta(t)) & \sin(2\alpha(t))\sin(\beta(t)) & \cos(2\alpha(t)) \end{pmatrix}.$$

The matrix R_t can be written as

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha(t)) & 0 & \sin(2\alpha(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(2\alpha(t)) & 0 & \cos(2\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta(t)) & -\sin(\beta(t)) & 0 \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_t^{(\upsilon)} R_t^{(\zeta)};$$

we note that $R_t^{(\upsilon)}$ is a rotation matrix around the υ axis with angle $2\alpha(t)$ while $R_t^{(\zeta)}$ is a rotation matrix around the ζ axis with angle $\beta(t)$. We know that

$$\boldsymbol{q}(t) = D_t\boldsymbol{Q}(t)$$

therefore we have the law in the absolute frame

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha(t))\cos(\beta(t)) & -\cos(2\alpha(t))\sin(\beta(t)) & \sin(2\alpha(t)) \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ -\sin(2\alpha(t))\cos(\beta(t)) & \sin(2\alpha(t))\sin(\beta(t)) & \cos(2\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}.$$

The relative frame moves of rototranslational motion with respect to the absolute frame and D_t reduces to

$$D_t = C_t \circ R_t$$

where

$$C_t = (t, 2t, 3t), \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos(\beta(t)) & -\sin(\beta(t)) & 0 \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The drag velocity is

$$\boldsymbol{v}_d = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_T$$

with

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

and

$$\boldsymbol{v}_T = \begin{pmatrix} -\sin(\beta(t))\dot\beta(t) & -\cos(\beta(t))\dot\beta(t) & 0 \\ \cos(\beta(t))\dot\beta(t) & -\sin(\beta(t))\dot\beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\beta(t)[-\cos(t)\sin(\beta(t)) - \sin(t)\cos(\beta(t))] \\ \dot\beta(t)[\cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t))] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We can also compute the rotational drag velocity using $\boldsymbol{q}(t)$, this is useful to know who is the angular velocity $\boldsymbol{\omega}(t)$; we have

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta(t)) & -\sin(\beta(t)) & 0 \\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t)) + t \\ \cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t)) + 2t \\ t + 3t \end{pmatrix},$$

so

$$\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t)) \\ \cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t)) \\ t \end{pmatrix},$$

and given a generic vector $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ we have

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_T &= \left| \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ \cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t)) & \cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t)) & t \end{pmatrix} \right| = \\ &= \begin{pmatrix} \omega_2(t)t - \omega_3(t)[\cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t))] \\ -\omega_1(t)t + \omega_3(t)[\cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t))] \\ \omega_1(t)[\cos(t)\sin(\beta(t)) + \sin(t)\cos(\beta(t))] - \omega_2(t)[\cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t))] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

but we have to have

$$\boldsymbol{v}_T = \begin{pmatrix} \dot\beta(t)[-\cos(t)\sin(\beta(t)) - \sin(t)\cos(\beta(t))] \\ \dot\beta(t)[\cos(t)\cos(\beta(t)) - \sin(t)\sin(\beta(t))] \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix}.$$

To compute the inertial forces we need the angular velocity in the relative frame

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta(t)) & \sin(\beta(t)) & 0 \\ -\sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix}.$$

The inertial forces are so given by

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_T = -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{Q} = m(\dot{\beta}(t)\sin(t), -\dot{\beta}(t)\cos(t), 0);\\
&\boldsymbol{F}_C = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{Q}} = 2m(\beta(t)\cos(t), \beta(t)\sin(t), 0);\\
&\boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q}) = m(\beta^2(t)\sin(t), \beta^2(t)\cos(t));\\
&\boldsymbol{F}_0 = mR^{-1}\ddot{\boldsymbol{r}} = (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Esercizio 3.

1. Sapendo che

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} = \log\left(\frac{3\rho^2 + 2}{2\rho^2}\right),$$

le equazioni di Newton sono

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} = -\frac{6\rho^4 - 2\rho^2(2 + 3L^2) - 4L^2}{2\rho^3(3\rho + 2)}$$

e dunque, ponendo $\dot{\rho} = y$, si ha che il sistema dinamico associato è dato da

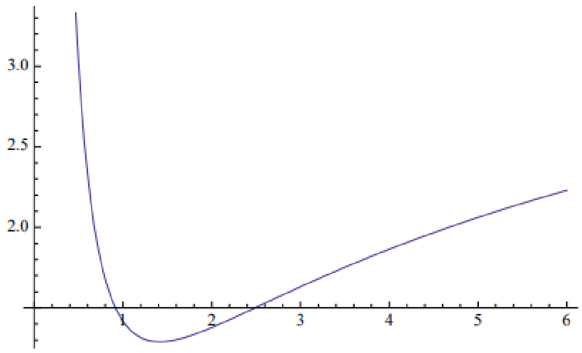
$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{6\rho^4 - 2\rho^2(2+3L^2) - 4L^2}{2\rho^3(3\rho+2)} \end{cases}.$$

2. I punti di equilibrio sono della forma $(\rho_0, 0)$, dove ρ_0 è un punto critico di V_{eff}. Calcolando $V'_{eff}(\rho)$ e ricordando che ρ è positivo (in quanto raggio), si ha che

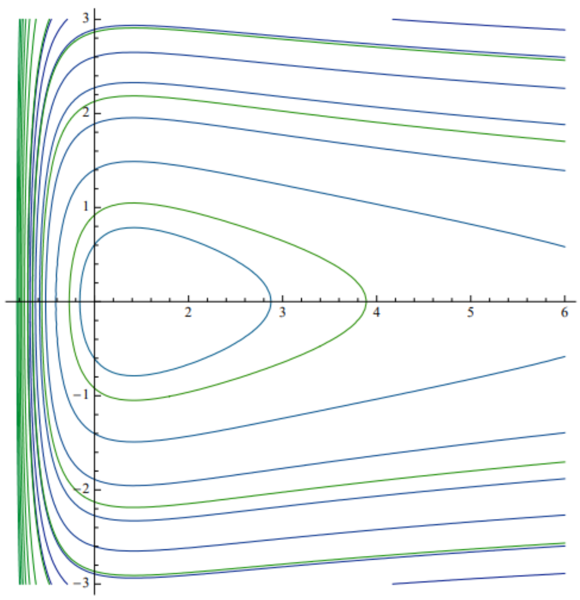
$$\rho_0 = \sqrt{\frac{(2 + 3L^2) + \sqrt{(2 + 3L^2)^2 + 24L^2}}{6}}$$

è un punto di minimo per $V_{eff}(\rho)$. Perciò, dal teorema di Dirichlet si ha che $(\rho_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema.

3. Dai calcoli svolti al punto precedente e notando che $\lim_{\rho \to 0^+} V_{eff}(\rho) = \lim_{\rho \to +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$ si ha che il grafico di $V_{eff}(\rho)$ è il seguente:



4. A partire dal grafico di V_{eff}, si ha che per $E = V_{eff}(\rho_0)$ c'è il solo punto di equilibrio e per $E > V_{eff}(\rho_0)$ ci sono traiettorie periodiche attorno al punto stabile. Il moto nel piano delle fasi è dato pertanto da:



5. Dal punto precedente segue che per $\rho > 0$ e per valori di energia $E > V_{eff}(\rho_0)$ si hanno traiettorie periodiche.

Esercizio 4. We know that every rigid transformation from an absolute to a relative frame can be decomposed in a unique way, due to Mozzi theorem, in a rotation R_t belonging to $SO(3)$ and a translation C_t. Moreover, Let us use the notation $\boldsymbol{q}(t)$ and $\boldsymbol{Q}(t)$ for the vectors identifying the point P, respectively, in the absolute frame and in the relative one; so that $\boldsymbol{q}(t) = D_t\boldsymbol{Q}(t) = R_t\boldsymbol{Q}(t) + \boldsymbol{r}(t)$. The absolute velocity is

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{q}}(t)$$

while the relative one is

$$\boldsymbol{v}' = R_t\dot{\boldsymbol{Q}}(t)$$

and we have

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_T + \boldsymbol{v}_0$$

where

$$\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{v}_T = \dot{R}_t \boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{r}(t))$$

are the translational velocity and the rotational one, respectively. If in the absolute frame the Newton equations are

$$m\ddot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{f}$$

than in the relative frame (moving of rototranslational motion with respect to the absolute frame) the Newton equation reads

$$m\ddot{\boldsymbol{Q}}(t) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_T + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_0$$

where

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F} = R_t^{-1}\boldsymbol{f};\\
&\boldsymbol{F}_T = -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{Q};\\
&\boldsymbol{F}_C = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{Q}};\\
&\boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q});\\
&\boldsymbol{F}_0 = -mR^{-1}\ddot{\boldsymbol{r}};
\end{aligned}$$

with

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = R_t^{-1}\boldsymbol{\omega}(t).$$

Let $\boldsymbol{e}_1$ and $\boldsymbol{e}_2$ the versors of Ox and Oy while $\boldsymbol{e}_1'$ and $\boldsymbol{e}_2'$ the versors of $O\chi$ and Ov. Since the relative frame is rotating with respect to the absolute one around the third axis we have

$$D_t = R_t = \begin{pmatrix} \cos(\gamma(t)) & -\sin(\gamma(t)) & 0\\ \sin(\gamma(t)) & \cos(\gamma(t)) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

so $\boldsymbol{e}_2 = sin(\gamma(t))\boldsymbol{e}_1' + cos(\gamma(t))\boldsymbol{e}_2'$. The weight force in the frame Oxy is given by $\boldsymbol{F}_w^{(Oxy)} = -mg\boldsymbol{e}_2$ so in the frame $O\chi v$ we have

$$\boldsymbol{F}_w^{(O\chi v)} = -mg[\sin(\gamma(t))\boldsymbol{e}_1' + \cos(\gamma(t))\boldsymbol{e}_2'].$$

The vector describing the motion of a single point of the road is given by

$$\boldsymbol{Q}(t) = r\boldsymbol{e}_C$$

where $\boldsymbol{e}_C = sin(\vartheta)\boldsymbol{e}_1' - cos(\vartheta)\boldsymbol{e}_2'$ is the versor of the road. Moreover the angular velocity is simply given by

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \dot{\gamma}(t) \end{pmatrix}$$

since the frames are rotating around the third axis. The problem say that the angular velocity is constant therefore, since we know that

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\Omega}}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = 0;$$

moreover the third axes of the two frame are parallel so

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{e}_3.$$

The inertial forces acting on every point of the road are only the centrifugal one and the Coriolis one:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_C = -2\lambda\omega\boldsymbol{e}_3 \times (\dot{r\boldsymbol{e}_C}) = 2\lambda\omega\boldsymbol{e}_3 \times r\dot{\vartheta}[\cos(\vartheta)\boldsymbol{e}_1' + \sin(\vartheta)\boldsymbol{e}_2'] = 2\lambda\omega r\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_C;\\
&\boldsymbol{F}_c = -\lambda\omega\boldsymbol{e}_3 \times (\omega\boldsymbol{e}_3 \times r\boldsymbol{e}_C) = \lambda\omega^2 r\boldsymbol{e}_C;
\end{aligned}$$

where $\lambda = \frac{m}{2l}$ is the mass per unit length of the road. To conclude the exercise we need to understand that the road is nothing but a collection of point on each of which inertial forces act; so the total centrifugal and Coriolis forces acting on the road are

$$\boldsymbol{F}_C^{(tot)} = \int_0^{2l} \boldsymbol{F}_C dr = 2m\omega\dot{\vartheta}l\boldsymbol{e}_C;$$
$$\boldsymbol{F}_c^{(tot)} = \int_0^{2l} \boldsymbol{F}_c dr = m\omega^2 l\boldsymbol{e}_C.$$

The resultant of the forces acting on the road in the $O\chi\upsilon$ frame is then

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{(res)} &= \boldsymbol{F}_C^{(tot)} + \boldsymbol{F}_c^{(tot)} + \boldsymbol{F}_w^{(O\chi\upsilon)} = \\ &= m[(2\omega\dot{\vartheta}l + \omega^2 l)\sin(\vartheta) - g\sin(\gamma(t))]\boldsymbol{e}_1' - m[(2\omega\dot{\vartheta}l + \omega^2 l)\cos(\vartheta) + g\cos(\gamma(t))]\boldsymbol{e}_2'\end{aligned}$$

where $\gamma(t) = \omega t$.