

---

---

Tutorato 7  
FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)  
Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica

LEZIONI: Guido Gentile

ESERCITAZIONI: Livia Corsi

TUTORATO: Federico Manzoni, Michela Policella

---

---

14/04/2023

## Preparazione al primo esonero

**Esercizio 1.** Given the following dynamical system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x[2y + 6] + y; \\ \dot{y} &= yx + 3x^2y.\end{aligned}$$

say if it is a conservative system and find a conserved quantity. Find the equilibrium points of the system. Focus on the linearized system at the stable equilibrium point such that  $|x_{eq} + y_{eq}| < \frac{1}{2}$ ; solve that system for a generic initial condition. Let us now turn on a perturbation of the system given by the force field  $F(t) = (\sin(6t), \cos(6t))$ , find the solution for the initial condition  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive il moto di un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \left( a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Al variare di  $a$ , si discutano i seguenti punti.

1. Studiare il grafico dell'energia potenziale.
2. Determinare eventuali punti di equilibrio.
3. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .

5. Per  $a = -1$  studiare qualitativamente la traiettoria con posizione iniziale  $x(0) = -1$  ed energia nulla e dire se esiste un tempo finito  $T$  in cui la soluzione attraversa l'asse  $y$ .

**Esercizio 3.** Two bodies of mass  $m_1 = 1 \cdot 10^{20}$ kg and  $m_2 = 2 \cdot 10^{22}$ kg are interacting and exert, on each other, a radial force given by

$$F(\mathbf{r}) = -(A\rho + B\rho^3)\frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \rho = |\mathbf{r}|, \quad A, B > 0.$$

Write down the equations of motion and find three constants of motion. Show that there exists a unique value  $\bar{\rho}$  of  $\rho$  corresponding to a circular trajectory and compute the period in function of  $\bar{\rho}$ . Plot the potential energy, draw the phase portrait in the plane  $(\rho, \dot{\rho})$  and discuss the orbit in the phase space. Write the period of closed orbits as definite integral and estimate it in the case of initial datum  $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\sqrt{10}, 0)$  with  $L = \sqrt{2}$  and  $A = 2, B = 0$  in the limit  $\mu \rightarrow 1$ . Compute the minimum value of the energy in function of  $\bar{\rho}$ . Assume  $L \neq 0$ .

**Esercizio 4.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove lungo l'asse  $y$  con legge oraria  $y_{O'}(t) = a \sin t$ , mentre il sistema ruota intorno all'asse verticale con velocità angolare  $\omega(t) = y_{O'}(t)$ . All'istante  $t = 0$  i due sistemi di riferimento coincidono.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  è fisso nel sistema  $K$  nella posizione  $(1, 0, 0)$ .

1. Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , i.e.  $D = C \circ B$ , e determinare  $C$  e  $B$ .
2. Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .
3. Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .
4. Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .
5. Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .
6. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto  $P$ .
7. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto  $P$ .