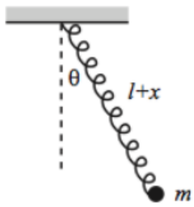
# Tutorato 8
# FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)
# Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Lezioni: Guido Gentile
Esercitazioni: Livia Corsi
Tutorato: Federico Manzoni, Michela Policella

02/05/2023

## Formalismo Lagrangiano: Lagrangiana ed equazioni di Eulero-Lagrange

**Esercizio 1.** Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza a riposo $\ell$ e di costante elastica $k$ sospesa ad un punto di sospensione $O$, al cui estremo libero è appesa una massa $m$.
Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle coordinate $x$ e $\theta$, dove $\ell + x$ è la lunghezza della molla e $\theta$ è l'angolo formato con la verticale, come in figura. Si determinino, quindi, le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.




**Esercizio 2.** Given the following Lagrangian

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2$$

find the equations of motion. Find the kinetic and potential energy of the system and describe what the system consists of.

**Esercizio 3.** Dati $m > 0$ ed $e \in \mathbb{R}$, scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema tridimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - eV(\mathbf{x}) + e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

dove $V(\mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ sono due funzioni di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ($V$ è una funzione scalare a valori in $\mathbb{R}$ e $\mathbf{A}$ è una funzione vettoriale a valori in $\mathbb{R}^3$).
Si riconosca che le equazioni del moto coincidono con le equazioni del moto di una particella di carica $e$ in un campo elettrico $\mathbf{E} = -\nabla V$ e campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

**Esercizio 4.** Given the following Lagrangian of a spherically symmetric system

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{x}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2,$$

find the Euler-Lagrange equations for $x, \theta, \varphi$ and find a solution.

**Esercizio 5.** Stabilire che forma assumono le equazioni di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x})$, per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, in coordinate sferiche. In particolare, data la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \mathbf{f}(r, \theta, \varphi),$$

determinare la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ corrispondente alla Lagrangiana meccanica $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - U(\mathbf{x})$ nelle nuove coordinate. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$. Si riconosca, infine, che se il potenziale $V(r, \theta, \varphi) = U(\mathbf{f}(r, \theta, \varphi))$ dipende dalle sole variabili $r$ e $\theta$, allora il sistema ammette una grandezza conservata e si determini tale grandezza.

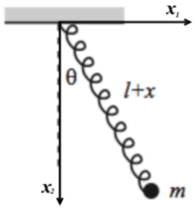
**Esercizio 6.** Given the following dynamical system

$$3\ddot{x} = 3x^2 + \frac{1}{x} - 2\dot{x}$$

find a possible Lagrangian.

# Soluzioni

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema di riferimento riportato di seguito:




Sappiamo che la Lagrangiana è definita come $\mathcal{L} := T - U$ dove $T$ è l'energia cinetica e $U$ è il potenziale.

Nel sistema di riferimento che stiamo considerando, le coordinate $x_{1,m}$ e $x_{2,m}$ del punto di massa $m$ nelle coordinate $x$ e $\theta$ sono date da

$$\begin{cases} x_{1,m} = (\ell + x)\sin\theta \\ x_{2,m} = (\ell + x)\cos\theta \end{cases},$$

da cui segue che

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,m} = \dot{x}\sin\theta + \dot{\theta}(\ell + x)\cos\theta \\ \dot{x}_{2,m} = \dot{x}\cos\theta - \dot{\theta}(\ell + x)\sin\theta \end{cases}.$$

L'energia cinetica è data pertanto da

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{1,m} + \dot{x}_{2,m}\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2(\ell + x)^2\right).$$

Per quanto riguarda il potenziale, invece, notiamo che il corpo di massa $m$ è soggetto sia alla forza peso che alla forza elastica, pertanto $U$ sarà dato da

$$U = U_{el} + U_{grav} = \frac{1}{2}kx^2 - mg(\ell + x)\cos\theta.$$

La Lagrangiana sarà quindi

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2(\ell + x)^2\right) - \frac{1}{2}kx^2 + mg(\ell + x)\cos\theta.$$

Calcoliamo ora le equazioni di Eulero-Lagrange:

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta;$
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Rightarrow m\ddot{\theta}(\ell + x)^2 + 2m\dot{\theta}\dot{x}(\ell + x) = -mg(\ell + x)\sin\theta.$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta \\ m\ddot{\theta}(\ell + x)^2 + 2m\dot{\theta}\dot{x}(\ell + x) = -mg(\ell + x)\sin\theta \end{cases}.$$

**Esercizio 2.** The Euler-Lagrange equations are

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

where $q = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. The equations of motion are given by

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1);$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1).$$

From the physical definition of Lagrangian we have

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \quad E_{pot} = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2.$$

The system consists of two bodies attached to three springs: it is a coupled pendulum.

**Esercizio 3.** Notiamo che, dato $\mathbf{x} = (x, y, z)$, si ha

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eV(x, y, z) + e(\dot{x}A_1(x, y, z) + \dot{y}A_2(x, y, z) + \dot{z}A_3(x, y, z)).$$

Si ha, quindi:

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_1}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_1}{\partial z}\right) = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial x}\right);$
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_2}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_2}{\partial z}\right) = -e\frac{\partial V}{\partial y} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial y}\right);$
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_3}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_3}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial z}\right) = -e\frac{\partial V}{\partial z} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial z} + \dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial z} + \dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial z}\right).$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono, pertanto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e[\dot{y}(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}) + \dot{z}(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z})] \\ m\ddot{y} = -e\frac{\partial V}{\partial y} + e[\dot{x}(\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x}) + \dot{z}(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})] \\ m\ddot{z} = -e\frac{\partial V}{\partial z} + e[\dot{x}(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) + \dot{y}(\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial y})] \end{cases}.$$

Ora,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix},$$

per cui le equazioni di Eulero-Lagrange si possono scrivere come

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eE_1 + e(\dot{y}B_3 - \dot{z}B_2) \\ m\ddot{y} = eE_2 + e(-\dot{x}B_3 + \dot{z}B_1) \\ m\ddot{z} = eE_3 + e(\dot{x}B_2 - \dot{y}B_1) \end{cases},$$

in forma vettoriale equivalenti a

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$$

che sono le equazioni del moto di una particella di carica $e$ in un campo elettrico $\mathbf{E}$ e campo magnetico $\mathbf{B}$.

**Esercizio 4.** The Euler-Lagrange equations are

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q},$$

where $q = (x, r, \theta, \varphi)$. Therefore:

- equation for $\dot{x}$:

$$\frac{d}{dt}\left[2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{x}\right] = 0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{const_1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)};$$

- equation for $\dot{\varphi}$:

$$\frac{d}{dt}\left[2r^2\sin^2(\theta)\right]\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{const_2}{r^2\sin^2(\theta)};$$

- equation for $\dot{\theta}$:

$$2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 = \frac{d}{dq}\left(2r^2\dot{\theta}\right) \Rightarrow 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 = 4r\dot{r}\dot{\theta} + 2r^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 - \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}.$$

  The equation is not trivial like the previous ones and we need some "initial" conditions; given the spherical symmetry we can impose that for a certain value of time $t = t_0$ we have $\theta(t_0) = \theta_0$ and $\dot{\theta}(t_0) = 0$. We therefore have a Cauchy problem and supposing the necessary Lipschitzianity the problem admits a unique solution. Since by value $\theta(t) = \theta_0$ we satisfy both the equation and the initial conditions, we can say that it is the only solution; this implies that the motion is planar. The equation for $\theta$ is simply

$$\theta(t) = \theta_0.$$

**Esercizio 5.** Data la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

si ha che

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix},$$

che implica

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta.$$

Pertanto, la Lagrangiana nelle nuove coordinate sarà data da

$$\tilde{\mathcal{L}}(r,\theta,\varphi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r,\theta,\varphi).$$

Calcoliamo ora le equazioni di Eulero-Lagrange:

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{r}} = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial r} \;\Rightarrow\; m\ddot{r} = mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - \frac{\partial V}{\partial r}$;
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\theta} \;\Rightarrow\; mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial V}{\partial\theta}$;
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\varphi} \;\Rightarrow\; mr^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2mr\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2mr^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = -\frac{\partial V}{\partial\varphi}$.

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - \frac{\partial V}{\partial r} \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = mr^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ mr^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2mr\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2mr^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}.$$

Ora, se il potenziale $V$ dipende solo dalle variabili $r$ e $\theta$, allora $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \varphi} = 0$ e perciò si ha $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\varphi}} = 0$, cioè

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \varphi} = mr^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \equiv p_\varphi$$

dove $p_\varphi$ è una costante del moto.

**Esercizio 6.** The equations of motion are of the form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}.$$

We know that the kinetic energy is a quadratic form of $\dot{x}$, so

$$K = \frac{3}{2}\dot{x}^2;$$

we compute

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{x} - 2\dot{x} \Rightarrow V(x,\dot{x},t) = -x^3 - \ln(|x|) + 2\dot{x}x - f(\dot{x},t),$$

but

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right] = -2\dot{x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial f(\dot{x},t)}{\partial \dot{x}} = 3\ddot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[-2x + \frac{\partial f(\dot{x},t)}{\partial \dot{x}}\right] = \frac{d}{dt}\left[3\frac{dx}{dt}\right],$$

so

$$-2x + \frac{\partial f(\dot{x},t)}{\partial \dot{x}} = 3\dot{x} + c_1.$$

This means that

$$f(\dot{x},t) = 2x\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + c_2,$$

but $f(\dot{x},t)$ must have no dependence from $x$, therefore no Lagrangian exists for this equation.