Tutorato 9
FM210 - Meccanica Analitica (CdL in Matematica)
Meccanica Analitica (CdL in Fisica)

Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica e Fisica
Lezioni: Guido Gentile
Esercitazioni: Livia Corsi
Tutorato: Federico Manzoni, Michela Policella

09/05/2023

Sistemi Lagrangiani

Esercizio 1 (Pendolo sferico)**.** Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso su una superficie sferica liscia (vincolo ideale) di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$, dove ℓ è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche:

$$\mathbf{x} = \ell \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\varphi \\ \sin\alpha\sin\varphi \\ 1 - \cos\alpha \end{pmatrix}$$

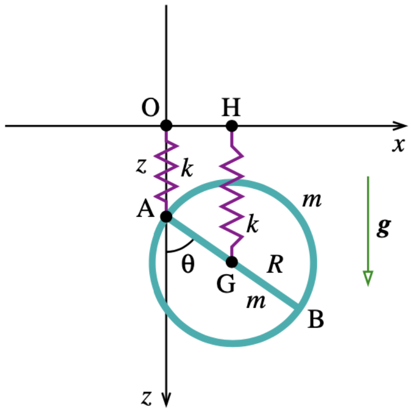
   e si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema vincolato usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\alpha, \varphi, \dot{\alpha}, \dot{\varphi})$. Inoltre, si noti che $\mathcal{L}$ è indipendente da φ (in questo caso si dice che φ è una variabile ciclica).

2. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E ed un secondo integrale primo $A = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}$.

3. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza da $\dot{\varphi}$ nell'espressione di E e si esprima così l'energia meccanica del sistema in funzione di $\alpha, \dot{\alpha}$ e di A nella forma $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha} + V_{eff}(\alpha)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\alpha)$?

4. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto nella variabile α.

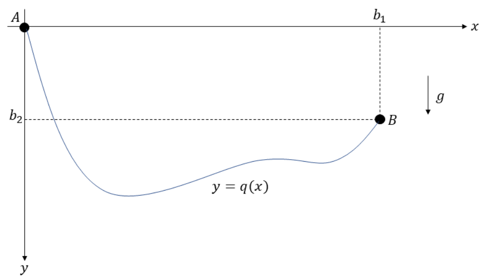
Esercizio 2. In a vertical plane, on which a system of orthogonal Cartesian axes Oxz is fixed, with vertical descending axis z, moves the rigid system formed by an homogeneous circular guide, of radius R and mass m, and by an homogeneous bar, of length $2R$ and mass m, welded on the diameter AB of the circular guide (see figure below). The point A of the system is constrained to slide without friction along the Oz axis. The active forces $F_1 = -k\bar{OA}$ act on the system, with $k > 0$, $F_2 = -k\bar{HG}$, where G is the center of mass of the system and H is the orthogonal projection of G on the Ox axis, and the weight force, directed in the positive direction of the Oz axis. Let $g > 0$ denote the acceleration due to gravity. The z coordinate of A and the angle θ that $\bar{AB}$ forms with the positive direction of the Oz axis are adopted as Lagrangian coordinates. Consider the bar as one-dimensional and the guide as a 1-dimensional circumference.



1. Write the Lagrange function L of the system and the equations of motion;
2. find the equilibrium positions of the system and discuss their number and stability as the parameter varies $\lambda = mg \in \mathbb{R}^+$.

Esercizio 3. Tra tutte le curve che passano per due punti A e B in un piano verticale (con B ad un'altezza minore o uguale di quella di A), determinare quella che gode della proprietà seguente: una particella inizialmente in quiete in A che cade lungo la curva sotto l'influenza della gravità e in assenza di attrito impiega il tempo minimo per raggiungere B (tale curva si chiama *brachistocrona*).

A tale scopo, una volta fissato un sistema di coordinate come in figura:



1. si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x))dx, \qquad \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) := \sqrt{\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}}$$

   nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0, b_2)$. Qui g è l'accelerazione di gravità, $y = q(x)$ rappresenta il profilo della curva, $A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q)$ ha il significato fisico di "tempo necessario a percorrere la curva $y = q(x)$ da A a B" e il puntino in $\dot{q}(x)$ rappresenta la derivata rispetto a x.
   [Suggerimento: si usi la conservazione dell'energia meccanica $E = \frac{1}{2}mv^2(x) - mgq(x)$ per ricavare la velocità della particella nel punto $(x, q(x))$ e quindi il tempo di percorrenza.]

2. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.

3. Si mostri che tale equazione è risolta da una *cicloide* con cuspide nel punto di partenza.
   [Suggerimento: si ricordi che l'equazione parametrica di una cicloide con cuspide nell'origine è

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

   da cui si vede che la sua equazione cartesiana ha la forma $y = r\left(1 - \cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right)$, dove $\varphi = h^{-1}$ è la funzione inversa di $h(t) = t - \sin t$.]

Esercizio 4. Given an open string, derive the equation of motion using the stationary-action principle and the following the steps:

1. find the area functional of an euclidean 2-dimensional surface using the two parameters τ and σ;

2. show that $\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 > 0$ using that every tangent vector can be written as combination of $\frac{\partial X}{\partial \tau}$ and $\frac{\partial X}{\partial \sigma}$. Write down the right area functional for a Lorentzian 2-dimensional surface where $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$ is the time direction and $\sigma \in [0, \sigma_s]$ the spatial one;

3. find the equation of motion discussing the boundary conditions fixing.

Soluzioni

Esercizio 1. 1. Data la parametrizzazione in coordinate sferiche si ha che

$$\dot{\mathbf{x}} = \ell \begin{pmatrix} \dot\alpha \cos\alpha \cos\varphi - \dot\varphi \sin\alpha \sin\varphi \\ \dot\alpha \cos\alpha \sin\varphi + \dot\varphi \sin\alpha \cos\varphi \\ \dot\alpha \sin\alpha \end{pmatrix},$$

da cui segue che

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \ell^2(\dot\alpha^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\alpha).$$

La Lagrangiana del sistema nelle variabili $\alpha, \varphi, \dot\alpha, \dot\varphi$ è data quindi da

$$\mathcal{L}(\alpha, \varphi, \dot\alpha, \dot\varphi) := T - V = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - mgz = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot\alpha^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\varphi) - mg\ell(1 - \cos\alpha).$$

Si noti che la Lagrangiana non dipende dalla variabile angolare φ, i.e. φ è una variabile ciclica.

2. Calcoliamo le equazioni di Eulero-Lagrange:

   - $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \;\Rightarrow\; m\ell^2\ddot\alpha = m\ell^2\dot\varphi^2 \sin\alpha\cos\alpha - mg\ell\sin\alpha;$
   - $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \;\Rightarrow\; m\ell^2\ddot\varphi \sin^2\alpha + 2m\ell^2\dot\alpha\dot\varphi \sin\alpha\cos\alpha = 0.$

   Le equazioni di Eulero-Lagrange sono date quindi da

$$\begin{cases} m\ell^2\ddot\alpha = m\ell^2\dot\varphi^2 \sin\alpha\cos\alpha - mg\ell\sin\alpha \\ m\ell^2\ddot\varphi \sin^2\alpha + 2m\ell^2\dot\alpha\dot\varphi\sin\alpha\cos\alpha = 0 \end{cases}.$$

   La seconda delle equazioni ci dice che

$$A := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = m\ell^2\dot\varphi\sin^2\alpha$$

   è una costante del moto.

   Vediamo che anche l'energia meccanica

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot\alpha^2 + \dot\varphi^2\sin^2\varphi) + mg\ell(1 - \cos\alpha)$$

   è una quantità conservata:

$$\frac{d}{dt}E = m\ell^2\dot\alpha\ddot\alpha + m\ell^2\dot\varphi\ddot\varphi\sin^2\alpha + m\ell^2\dot\alpha\dot\varphi^2\cos\alpha\sin\alpha + mg\ell\dot\alpha\sin\alpha = 0,$$

   dove l'ultima uguaglianza segue in modo diretto dalle equazioni di Eulero-Lagrange.

3. Dalla conservazione di A si ha che:

   (i) se $A = 0$ allora $\dot\varphi\sin\alpha \equiv 0$, che implica che l'equazione del moto per α è $\ddot\alpha = -\frac{g}{\ell}\sin\alpha$, i.e. il moto si riduce a quello di un pendolo semplice bidimensionale;

(ii) Se $A \neq 0$ allora $\dot{\varphi} = \frac{A}{m\ell^2 \sin^2 \alpha}$. Sostituendo questo valore nell'equazione dell'energia totale otteniamo

$$E = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\alpha}^2 + \left(\frac{A^2}{2m\ell^2 \sin^2 \alpha} + mg\ell(1 - \cos\alpha) \right) =: \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\alpha}^2 + V_{eff}(\alpha),$$

con $V_{eff}(\alpha) := \frac{A^2}{2m\ell^2 \sin^2 \alpha} + mg\ell(1 - \cos\alpha)$.

4. Dobbiamo ora studiare il moto per $A \neq 0$ e $\alpha \in (0, \pi)$.

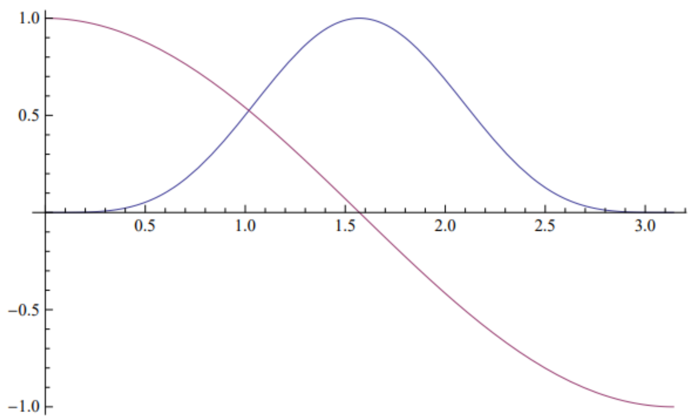
Notiamo che $\lim_{\alpha \to 0} V_{eff}(\alpha) = \lim_{\alpha \to \pi} V_{eff}(\alpha) = +\infty$. I punti di equilibrio sono quelli che soddisfano l'equazione

$$V'_{eff}(\alpha) = \frac{-A^2 \cos\alpha}{m\ell^2 \sin^2 \alpha} + mg\ell \sin\alpha = 0,$$

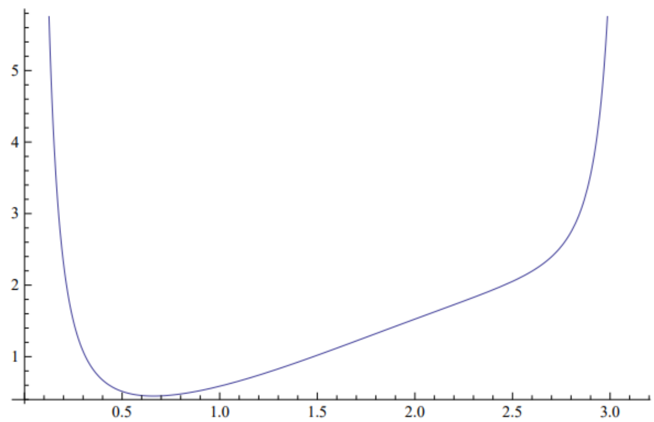
i.e. quelli tali che

$$mg\ell \sin^4 \alpha - \frac{A^2}{m\ell^2} \cos\alpha = 0.$$

Per capire quante radici ha l'ultima equazione, usiamo il metodo grafico, da cui segue che l'equazione ammette una ed una sola radice in $(0, \pi)$, che chiamiamo α^*, come riportato in figura:



Il grafico di V_{eff} è quello riportato di seguito:



Pertanto:

- per $E < V_{eff}(\alpha^*)$ non esistono moti;
- per $E = V_{eff}(\alpha^*)$ si ha la soluzione di equilibrio $\alpha = \alpha^*$. Inoltre, dalle equazioni di Eulero-Lagrange sappiamo che $\dot{\varphi} = const$, pertanto il moto complessivo è circolare uniforme e si svolge sul parallelo identificato dall'angolo α^*;
- per $E > V_{eff}(\alpha^*)$ il moto della variabile α è periodico tra i punti α_- e α_+ soluzioni dell'equazione $V_{eff}(\alpha) = E$. Il periodo è dato da

$$T_1 = 2\int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}(E - V_{eff}(\alpha))}}.$$

Il moto complessivo è periodico o quasi-periodico a seconda del valore, razionale o irrazionale, di $\frac{T_1}{T_2}$, dove T_2 è il periodo della soluzione dell'equazione per φ.

Esercizio 2. We have $x_G = R\sin(\theta)$ and $z_G = z + R\cos(\theta)$, moreover the body can rotate around the axis passing through the point A since the point A is constrained to move along the axis. Therefore we have

$$K = \frac{1}{2}(2m)(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}I_A^{(tot)}\dot{\theta}^2$$

where the $2m$ is due to the sum $m+m$ and $I_G^{(tot)} = I_G^{guide} + I_G^{(bar)}$. Let us compute the inertial momenta:

$$\begin{aligned} I_G^{(bar)} &= \int_{-R}^{R} x^2 dm = \int_{-R}^{R} x^2 \rho dx = \rho\frac{2R^3}{3} = \frac{mR^2}{3}, \\ I_G^{(guide)} &= \int_0^{2\pi} R^3\rho d\theta = mR^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Therefore

$$I_G^{(tot)} = \frac{4}{3}mR^2, \tag{2}$$

and

$$K = \frac{m}{2}\left[2\dot{z}^2 + \frac{8}{3}R^2\dot{\theta}^2 - 4Rsin(\theta)\dot{z}\dot{\theta}\right]. \tag{3}$$

The potential energy is given by

$$U = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k(z + Rcos(\theta))^2 - 2mg(z + Rcos(\theta)). \tag{4}$$

The Lagranginan function is therefore

$$L = K - U. \tag{5}$$

We have

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 2m\dot{z} - 2mR\sin(\theta)\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{8}{3}mR^2\dot{\theta} - 2mR\sin(\theta)\dot{z};$$

and

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -kz - k(z + R\cos(\theta)) + 2mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = k(z + R\cos(\theta))R\sin(\theta) - 2mgR\sin(\theta).$$

Therefore, the Euler-Lagrange equations are

$$\begin{aligned} &2m\ddot{z} - 2mR(\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)\ddot{\theta}) = -kz - k(z + R\cos(\theta)) + 2mg, \\ &\frac{8}{3}mR^2\ddot{\theta} - 2mR(\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{z} + \sin(\theta)\ddot{z}) = k(z + R\cos(\theta))R\sin(\theta) - 2mgR\sin(\theta). \end{aligned}$$

The derivatives of the potential energy are just found to be

$$\frac{\partial U}{\partial z} = kz + k(z + R\cos(\theta)) - 2mg \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -k(z + R\cos(\theta))R\sin(\theta) + 2mgR\sin(\theta);$$

the equilibrium points are the stationary points of the potential energy, therefore

$$\begin{cases} z + \frac{R}{2}\cos(\theta) = \frac{mg}{k}, \\ (z + R\cos(\theta) - \frac{2mg}{k})\sin(\theta) = 0. \end{cases}$$

We have four solutions:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\theta_1 = 0, z_1 = \frac{mg}{k} - \frac{R}{2}\right); \\ P_2 &= \left(\theta_2 = 0, z_2 = \frac{mg}{k} + \frac{R}{2}\right); \\ P_3 &= \left(\theta_3 = +\arccos\left(\frac{2mg}{kR}\right), z_3 = 0\right); \\ P_4 &= \left(\theta_4 = -\arccos\left(\frac{2mg}{kR}\right), z_4 = 0\right); \end{aligned} \tag{6}$$

and to study the stability we need to compute the Hessian of the potential energy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \theta} = R\cos(\theta)[2mg - k(z + R\cos(\theta))] + kR^2\sin^2(\theta), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -kR\sin(\theta).$$

The Hessian in the first position is $2k^2R^2(\frac{mg}{kR} - \frac{1}{2})$ and since $\partial^2_{zz}U < 0$ the necessary and sufficient condition of stable equilibrium is that the Hessian is positive. We therefore have that the equilibrium position (z_1, θ_1) is stable for $\lambda > \frac{1}{2}$. The Hessian in the first position is $2k^2R^2(\frac{mg}{kR} + \frac{1}{2})$ and since $\partial^2_{zz}U < 0$ the necessary and sufficient condition of stable equilibrium is that the Hessian is positive. We therefore have that the equilibrium position (z_2, θ_2) is stable for $\lambda \geq 0$. In positions P_3 and P_4 the Hessian is $k^2R^2\sin^2(\theta)$ is always positive, therefore these equilibrium positions are stable when they exist, i.e. for $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. 1. Chiamiamo $\tau(A, B)$ il tempo che la particella impiega per andare da A a B, cioè

$$\tau(A, B) = \int_0^{\tau(A,B)} dt = \int_0^{b_1} dt(x),$$

dove indichiamo con $dt(x)$ il tempo impiegato dalla particella per percorrere un tratto di curva infinitesimo, corrispondente ad una variazione delle ascisse uguale a dx, a partire dal punto $(x, q(x))$. Se $v(x) \in \mathbb{R}^2$ è la velocità istantanea della particella che si muove lungo la curva, all'istante in cui la particella si trova nel punto $(x, q(x))$ si ha $v(x) = \frac{d\ell}{dt}$, dove $d\ell$ è il valore assoluto dello spostamento infinitesimo della particella lungo la curva, i.e. $d\ell = |(1, \dot{q}(x))|dx = \sqrt{1 + \dot{q}^2(x)}dx$, e quindi

$$v(x) = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + \dot{q}^2(x)}.$$

Da questa relazione ricaviamo $dt(x) = dx\frac{\sqrt{1+\dot{q}^2(x)}}{v(x)}$. Inoltre, sappiamo che l'energia $E = \frac{1}{2}mv^2(x) - mgq(x)$ è una costante del moto e, poiché la particella all'istante iniziale si trova in quiete nel punto $(0, 0)$, sappiamo che $E = 0$. Pertanto,

$$v(x) = \sqrt{2gq(x)}.$$

Sostituendo questo valore nella formula per $\tau(A,B)$ otteniamo

$$\tau(A,B) = \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1+\dot{q}^2(x)}{2gq(x)}}dx.$$

Il problema, quindi, corrisponde a minimizzare $\tau(A,B)$ rispetto a $q(x)$ nello spazio delle curve $q(x)$ che vanno da A a B, che è equivalente a minimizzare il funzionale

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x),\dot{q}(x))dx, \qquad \mathcal{L}(q(x),\dot{q}(x)) := \sqrt{\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}}$$

sullo spazio delle curve $(x,q(x))$ passanti per i punti $(0,0)$ e (b_1,b_2), i.e. sullo spazio $\mathcal{M}_{0,b_1}(0,b_2)$.

2. La condizione di minimo per $\mathcal{A}^{\mathcal{L}}_{0,b_1}$ implica la condizione di stazionarietà per $\mathcal{A}^{\mathcal{L}}_{0,b_1}$ e, dalla teoria, sappiamo che quest'ultima è equivalente alle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}.$$

Questo significa che la curva che realizza il minimo è la soluzione di tali equazioni.

Calcoliamo, pertanto, le equazioni di Eulero-Lagrange:

- $\frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{q}(x)}{\sqrt{2gq(x)(1+\dot{q}^2(x))}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2gq(x)(1+\dot{q}^2(x))}}\left(\frac{\ddot{q}(x)}{1+\dot{q}^2(x)} - \frac{\dot{q}^2(x)}{2q(x)}\right)$;
- $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\sqrt{1+\dot{q}^2(x)}}{2q(x)\sqrt{2gq(x)}}$.

Quindi, uguagliando le due relazioni si ottiene:

$$2q(x)\ddot{q}(x) + \dot{q}^2(x) + 1 = 0.$$

3. Rimane da far vedere che

$$q(x) = r\left(1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right)$$

risolve l'equazione di Eulero-Lagrange.

Calcoliamo $\dot{q}(x)$ e $\ddot{q}(x)$ e sostituiamo nell'equazione, ricordando che $\varphi := h^{-1}$ dove $h(t) := t - \sin t$:

- $\dot{q}(x) = \varphi'\left(\frac{x}{r}\right)\sin\varphi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\sin\varphi\left(\frac{x}{r}\right)}{1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)}$;
- $\ddot{q}(x) = -\frac{1}{r\left(1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right)^2}$.

Otteniamo, quindi:

$$2q(x)\ddot{q}(x) + \dot{q}^2(x) + 1 = 2r\left(1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right)\left(-\frac{1}{r\left(1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right)^2}\right) + \left(\frac{\sin\varphi\left(\frac{x}{r}\right)}{1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)}\right)^2 + 1 =$$
$$= \frac{-2\left(1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right) + \sin^2\varphi\left(\frac{x}{r}\right) + \left(1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right)^2}{\left(1-\cos\varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right)^2} = 0,$$

che è quello che volevamo.

Pertanto, la cicloide con cuspide in 0 è un punto stazionario del funzionale considerato.

Esercizio 4. As first step we need to find the area functional of a 2-dimensional euclidean surface Σ_2. To describe a surface we need two parameters that we will call τ and σ, and a vector map which associates a point of the surface at each point of the parametrization space, the two-dimensional space (τ, σ), $X : \mathbb{R}^2 \to \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^d$ such that $d \geq 2$ and

$$(\tau, \sigma) \mapsto \vec{X} = (X_1(\tau, \sigma), ..., X_d(\tau, \sigma)). \tag{7}$$

Since this is an immersion we have $\text{rank}(dX) = \dim(\mathbb{R}^2)$ so

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \tau} & \dots & \frac{\partial X_d}{\partial \tau} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \sigma} & \dots & \frac{\partial X_d}{\partial \sigma} \end{pmatrix} = 2. \tag{8}$$

In general, any infinitesimal rectangle in the space (τ, σ) will be mapped to a generic quadrilateral with sides $d\vec{v_1}$ and $d\vec{v_2}$. The differential of a generic vector $\vec{X}(\tau, \sigma)$ can be written as

$$d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} d\sigma, \tag{9}$$

furthermore the vectors $d\vec{v_1}$ and $d\vec{v_2}$ are respectively the images of the vectors $(d\tau, 0)$ and $(0, d\sigma)$ so

$$d\vec{v_1} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} d\tau; \; d\vec{v_2} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} d\sigma. \tag{10}$$

Using the formula for the area of a parallelogram, it is possible to determine the area of the generic quadrilateral on the surface

$$dA = |d\vec{v_1}||d\vec{v_2}| sen(\theta) = \sqrt{|d\vec{v_1}|^2 |d\vec{v_2}|^2 - |d\vec{v_1}|^2 |d\vec{v_2}|^2 cos^2(\theta)}, \tag{11}$$

where θ is the angle between the two vectors and the fundamental trigonometric relation has been used. Expressing 11 by means of the Euclidean scalar product we obtain

$$dA = \sqrt{(d\vec{v_1} \cdot d\vec{v_1})(d\vec{v_2} \cdot d\vec{v_2}) - (d\vec{v_1} \cdot d\vec{v_2})^2}. \tag{12}$$

Thanks to 10 and integrating

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2}. \tag{13}$$

The positivity of the quantity under the root is a direct consequence of Schwarz's inequality.

In the second step, we have to show that we need to change the sing in the area functional if we are talking about of a 2-dimensional Lorentzian surface. Let us do it. Any vector tangent to a given point can be written as

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \Rightarrow v^2(\lambda) = \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\lambda \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}, \tag{14}$$

with $\lambda \in (-\infty, \infty)$ and and $\mu \in I := (0, .., d-1)$. Since $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ and $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ are linearly independent due to 8, varying the parameter λ we get all the vectors tangent to a generic point. Since 14 must be able to describe both time-like and space-like vectors, there must be a value of the parameter λ such that $v^2(\lambda = \tilde{\lambda}) = 0$;

$$v^2(\tilde{\lambda}) = \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 + \tilde{\lambda}^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\tilde{\lambda} \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0, \tag{15}$$

where the implication is due to the fact that the equation $v^2(\tilde{\lambda}) = 0$ must have two real roots in order to give rise to time-like ($v^2 < 0$) and space-like ($v^2 > 0$). Therefore its discriminant, Δ, must be positive

$$\Delta = 4\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - 4\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 > 0. \tag{16}$$

Therefore for a 2-dimensional Lorentzian surface the area functional is

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)}. \tag{17}$$

The third step ask for the equation of motion using the stationarity of the action that in this case is a area functional. To begin we rewrite the action in terms of the Lagrangian density

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu), \tag{18}$$

where $\mathcal{L} = \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}$, $\dot{X} := \frac{\partial X}{\partial \tau}$ and $X' := \frac{\partial X}{\partial \sigma}$.
By varying the action 18 we have to evaluate the variation of the Lagrangian density, in fact

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \delta(\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu)) = \int d\tau d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma}\right], \tag{19}$$

and we define

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} &= \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} := \Omega_\mu; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} &= \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} := \Theta_\mu. \end{aligned} \tag{20}$$

Making the integration extremes explicit, writing the action in terms of the derivatives of $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}(\delta X^\mu)$ with respect to τ and $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}(\delta X^\mu)$ with respect to σ, using 20 and imposing stationarity, we obtain

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_s} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau}(\Omega_\mu \delta X^\mu) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\Theta_\mu \delta X^\mu) - \delta X^\mu\left(\frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial \sigma}\right)\right] = 0. \tag{21}$$

The first term is vanishing since it returns a quantity proportional to $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$ and $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$ but the stationarity principle impose that the variation at the extremes is vanishing The second term can be rewritten:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_s} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \sigma}(\Theta_\mu \delta X^\mu)\right] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\Theta_\mu \delta X^\mu\right]_0^{\sigma_s}, \tag{22}$$

where σ_s is the length of the string and expanding we obtain

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \Big(- \Theta_0(\tau, \sigma_s)\delta X^0(\tau, \sigma_s) + \Theta_0(\tau, 0)\delta X^0(\tau, 0) + ... + \Theta_{d-1}(\tau, \sigma_s)\delta X^{d-1}(\tau, \sigma_s) - \Theta_{d-1}(\tau, 0)\delta X^{d-1}(\tau, 0)\Big); \tag{23}$$

To cancel this term we need several boundary conditions; these conditions can be applied to Θ_μ or to δX^μ:

- $\Theta_\mu(\tau, \sigma_b) = 0 \Rightarrow$ Neumann conditions;
- $\delta X_\mu(\tau, \sigma_b) = 0 \Rightarrow$ Dirichlet conditions;

being $\sigma_b = 0$ or $\sigma_b = \sigma_s$. The equations of motion are then

$$\frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial \sigma} = 0. \tag{24}$$