

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Prima prova di esonero (08-11-2022)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}.$$

Si determinino $A \cup B$ e $A \cap B$, e si disegnino i quattro insiemi.

FACOLTATIVO: si verifichi che $A \cap B$ è costituito da due quadrati e se ne calcoli l'area.

ESERCIZIO 2. [5+2] Si studino i domini di due delle seguenti tre funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{e^{-x} \ln \left(\frac{4x - x^2}{3} \right)}, \quad f_2(x) = \sqrt{1 - \ln(1 + x)}, \quad f_3(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

FACOLTATIVO: si studi il dominio anche dell'altra funzione.

ESERCIZIO 3. [4] Si calcoli la derivata delle due seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{1 + x^2}, \quad f_2(x) = x^2 + x + \sqrt{\ln(x^2 + e^{2x})}.$$

ESERCIZIO 4. [6+3] Si studi la continuità e la derivabilità di due delle seguenti tre funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & x \geq 0, \\ 1 - x^2, & x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x + x^2, & x \geq 0, \\ |x + 1|, & x < 0, \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} x|x - 1|, & x \geq 0, \\ x + x^2, & x < 0. \end{cases}$$

FACOLTATIVO: si studi la continuità e la derivabilità anche dell'altra funzione.

ESERCIZIO 5. [6] Si calcolino i due seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{1 - \cos x}.$$

ESERCIZIO 6. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.
