

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022/2023

Preparazione alla prima prova di esonero (02-11-2022)

ESERCIZIO 1. [6+2] Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}.$$

Si determinino $A \cup B$ e $A \cap B$, e si disegnino i quattro insiemi.

FACOLTATIVO: si verifichi che $A \cap B$ è un triangolo e se ne calcoli l'area.

ESERCIZIO 2. [4+2] Si studino i domini di due delle seguenti tre funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 1)}, \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad f_3(x) = \ln(x^2 - 4x + 1).$$

FACOLTATIVO: si studi il dominio anche dell'altra funzione.

ESERCIZIO 3. [4] Si calcoli la derivata delle due seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sin \sqrt{x^2 - x + 12}, \quad f_2(x) = e^{x+\sqrt{x}} \ln(1 + \sqrt{x}).$$

ESERCIZIO 4. [6+3] Si studi la continuità e la derivabilità di due delle seguenti tre funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ e^x, & x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = |x^2 - x|, \quad f_3(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1), & x \geq 0, \\ x^2|x - 1|, & x < 0. \end{cases}$$

FACOLTATIVO: si studi la continuità e la derivabilità anche dell'altra funzione.

ESERCIZIO 5. [6] Si calcolino i due seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{\ln(1 + x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin x - (\cos x)^2 - e^x}{x^2}.$$

ESERCIZIO 6. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{x^3 - 1}\right).$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.
