

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022/2023

Preparazione alla seconda prova di esonero (21-12-2022)

ESERCIZIO 1. [5] Si considerino i vettori in \mathbb{R}^3

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 3), \quad \vec{v}_3 = (2, 1, 1).$$

- (1) Si discuta se i vettori sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti.
 - (2) Si calcolino i prodotti scalari $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$ e $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$.
 - (3) Si calcolino i prodotti vettoriali $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ e $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$.
 - (4) Si determini il vettore $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, e si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}$.
-

ESERCIZIO 2. [5+3] Si scriva l'equazione del piano π ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 3, -4)$ passante per il punto $P = (0, 1, 1)$, e si determini il punto di intersezione Q del piano con la retta r di equazioni

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}.$$

(*) Si determinino i punti della retta r che hanno distanza $d = 2$ dal punto Q .

ESERCIZIO 3. [5+2] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Si dimostri che uno degli autovalori di A è $\lambda_1 = 0$ e se ne deduca che $\det A = 0$.
 - (2) Si calcoli l'autovettore \vec{v}_1 associato all'autovalore λ_1 .
 - (3) Si calcolino gli altri autovalori λ_2 e λ_3 di A .
 - (4) Si calcolino gli autovalori della matrice $B = A^2 - 6A + 3\mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ è la matrice identità.
 - (*) Si calcolino gli autovettori \vec{v}_2 e \vec{v}_3 associati agli autovalori λ_2 e λ_3 .
-

ESERCIZIO 4. [5+2] Si calcolino due dei seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x - 6x + x^3}{6x^5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x + 1}{2x^2 + x^3 + x - e^x - 1}$$

(*) Si calcoli anche l'altro limite.

ESERCIZIO 5. [5] Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$$

ESERCIZIO 6. [5+3] Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(*) Si discuta l'esistenza di punti di massimo e di minimo assoluto in \mathbb{R}^2 .
