

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Prova scritta - Primo appello (18-01-2023)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 3x + 2}, \quad g(x) = \ln(x) \sqrt{2 - x^2}, \quad h(x) = \ln((x - 1)(x + 2)(x + 3)).$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+3] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 7} - x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^4) - \log(1 - x^4)}{(e^{x^2} - 1)^2}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 9}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+2] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 2), \quad \vec{v}_3 = (1, 3, 3),$$

e si calcolino sia il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ sia il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

FACOLTATIVO: Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

FACOLTATIVO: Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1} .

ESERCIZIO 6. [5+2] Si discuta la continuità in $(0, 0)$ della seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^2 y^2 + y^4}{xy^3}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

e se ne calcolino le derivate parziali nel punto $(x, y) = (1, 1)$.

FACOLTATIVO: Si calcoli la derivata direzionale della funzione $f(x, y)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1, 1)$, nel punto $(x, y) = (1, 1)$.
