

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Prova scritta - Secondo appello (06-02-2023)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}, \quad g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x + 2) \ln x}, \quad h(x) = \ln(|x|(1 - x^2)).$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+3] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x + 1)(x - 2)}{(x^2 - 4)(x - 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(3x))(\operatorname{tg}(2x))}{1 - \cos(4x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \ln(1 + x))^2 - 1 - 2 \sin x}{x^2 \sin x}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x + 2}}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+2] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 3), \quad \vec{v}_3 = (-2, 2, 2),$$

e si calcolino sia il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ sia il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

FACOLTATIVO: Si calcolino i prodotti vettoriale $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ e $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi in particolare che gli autovettori sono ortogonali.

FACOLTATIVO: Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1} .

ESERCIZIO 6. [5+2] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 y - 2x - y.$$

1. Si calcolino massimi e minimi di $f(x, y)$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$.
2. Si calcoli la derivata direzionale di $f(x, y)$ in $(x, y) = (0, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1, 1)$.

FACOLTATIVO: Si discuta se la funzione ammette massimi e minimi assoluti in \mathbb{R}^2 .
