

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Prova scritta - Terzo appello (14-04-2023)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{\sin x}{2(\cos x)^2 - 1}, \quad g(x) = \sqrt{(x - \ln 3)(x - \ln 2)}, \quad h(x) = \frac{|x| + 1}{|x| - x^2}.$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+3] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1+x}}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} + (1 - \cos 2x)}{(\sin x)^2(1 - \cos x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) - \ln(1-x^3)}{e^{x^3} - 1}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+2] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (4, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (-1, 0, 4), \quad \vec{v}_3 = (2, 2, 2),$$

e si calcolino sia il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ sia il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

FACOLTATIVO: Si calcolino i prodotti vettoriale $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ e $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi in particolare che la matrice ammette 3 autovettori, di cui uno è ortogonale agli altri due.

FACOLTATIVO: Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1} .

ESERCIZIO 6. [5+2] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2x^2y - y^2.$$

1. Si calcolino massimi e minimi di $f(x, y)$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1\}$.
2. Si calcoli la derivata direzionale di $f(x, y)$ in $(x, y) = (0, 1/2)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1, 0)$.

FACOLTATIVO: Si discuta se la funzione ammette massimi e minimi assoluti in \mathbb{R}^2 .
