

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Prova scritta - Quinto appello (04-07-2023)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{\cos x}{(1 - \ln x) \ln x}, \quad g(x) = \sqrt{(x^2 - 2)(x^2 - 1)}, \quad h(x) = \ln(e^x - 1).$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+3] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^3 - 1)}{(x - 1)^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \operatorname{tg}(2x)}{(\sin x)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - \sin x}{\ln(1 + x^2)}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^3(x + 1)e^{-4x}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+2] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, -1, 3), \quad \vec{v}_3 = (3, 5, 1),$$

e si calcolino sia il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ sia il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

FACOLTATIVO: Si calcolino i prodotti vettoriale $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ e $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi in particolare che gli autovettori sono ortogonali.

FACOLTATIVO: Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1} .

ESERCIZIO 6. [5+2] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}.$$

1. Si calcolino massimi e minimi di $f(x, y)$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 12\}$.
2. Si calcoli la derivata direzionale di $f(x, y)$ in $(x, y) = (0, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1, 1)$.

FACOLTATIVO: Si discuta se la funzione ammette massimi e minimi assoluti in \mathbb{R}^2 .