

# Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Prova scritta - Sesto appello (06-09-2023)

---

ESERCIZIO 1. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x^2 + 2x - 8}, \quad g(x) = \sqrt{(e^{x^2-x}) - 1}, \quad h(x) = \ln(1 - \sqrt{1-x}).$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

---

ESERCIZIO 2. [6+3] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin 4x}{(\sin 2x)^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \ln(1+x)}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

---

ESERCIZIO 3. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = 2x^2 - 3x - \ln|x|.$$

In particolare

1. si determini il dominio  $D_f$  della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio  $C_f$  della funzione.

---

ESERCIZIO 4. [5+2] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (0, 1, 4), \quad \vec{v}_3 = (8, 6, 0),$$

e si calcolino sia il prodotto scalare  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$  sia il prodotto vettoriale  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ .

FACOLTATIVO: Si calcoli il prodotto vettoriale  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ .

---

ESERCIZIO 5. [5+2] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

FACOLTATIVO: Si dimostri che  $A$  è invertibile e si calcoli la matrice inversa  $A^{-1}$ .

---

ESERCIZIO 6. [5+2] Si discuta la continuità in  $(0, 0)$  della seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^3y + xy^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

e se ne calcolino le derivate parziali nel punto  $(x, y) = (1, 1)$ .

FACOLTATIVO: Si calcoli la derivata direzionale della funzione  $f(x, y)$  nella direzione del vettore  $\vec{u} = (1, 1)$ , nel punto  $(x, y) = (1, 1)$ .

---