

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Prova scritta - Settimo appello (07-11-2023)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}, \quad g(x) = \sqrt{x \ln x}, \quad h(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x|x| - 2x + 1}.$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+3] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x^5) \sin 2x}{(x^2 + x)(\cos x - 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x + e^{-x} - e^{2x^2}}{x(e^{x^2} - 1)}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10+1] Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = x^2 (x^2 - 1) e^{-x^2}.$$

1. Si determini il dominio D_f della funzione,
2. Si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. Si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. Si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. Si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. Si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+2] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (5, 4, 3), \quad \vec{v}_2 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_3 = (-1, 0, 1),$$

e si calcolino sia il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ sia il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

FACOLTATIVO: Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si considerino le due matrici seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli la matrice $C = B^2 - A$.
2. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di entrambe le matrici A e B

FACOLTATIVO: Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1} .

ESERCIZIO 6. [5+2] Si discuta la continuità in $(0, 0)$ della seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2 + x y^4 + x^3 y^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

e se ne calcolino le derivate parziali nel punto $(x, y) = (1, 1)$.

FACOLTATIVO: Si calcoli la derivata direzionale di $f(x, y)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1, 1)$ in $(x, y) = (1, 1)$.
