

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Recupero della prima prova di esonero (06-02-2023)

ESERCIZIO 1. [5] Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1 - x^2\}.$$

Si determinino $A \cup B$ e $A \cap B$ e si disegnino i quattro insiemi.

ESERCIZIO 2. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}, \quad g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x + 2) \ln x}, \quad h(x) = \ln(|x|(1 - x^2)).$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 3. [4] Si calcoli la derivata delle seguenti due funzioni:

$$f(x) = \frac{\ln(\pi) x^3 e^x + 4x}{x + \sin(2)}, \quad g(x) = e^{\cos(x)}(1 + \sqrt{2+x}).$$

ESERCIZIO 4. [6+3] Si studi la continuità e la derivabilità di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ x^3, & x \leq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x + x^3 & x \geq 0, \\ e^x & x < 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x^2 - 4|}, & x \geq 0, \\ \frac{x^2}{|x^3 - 1|}, & x < 0. \end{cases}$$

FACOLTATIVO: Si studi la continuità e la derivabilità della terza funzione.

ESERCIZIO 5. [6+3] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x + 1)(x - 2)}{(x^2 - 4)(x - 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(3x))(\operatorname{tg}(2x))}{1 - \cos(4x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \ln(1 + x))^2 - 1 - 2 \sin x}{x^2 \sin x}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 2. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x + 2}}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.
