

# Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

Recupero della seconda prova di esonero (18-01-2023)

---

ESERCIZIO 1. [5+2] Siano  $P_1 = (1, 1)$ ,  $P_2 = (2, 5)$  e  $P_3 = (4, 7)$  tre punti del piano  $xy$ . Si scriva l'equazione della retta  $r$  passante per i punti  $P_1$  e  $P_2$  e si calcoli la distanza tra la retta  $r$  e il punto  $P_3$ .

FACOLTATIVO: Si scriva l'equazione della retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per il punto  $P_3$ .

---

ESERCIZIO 2. [5+2] Si discuta la continuità in  $(0, 0)$  della seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{xy^3}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

e se ne calcolino le derivate parziali nel punto  $(x, y) = (1, 1)$ .

FACOLTATIVO: Si calcoli la derivata direzionale della funzione  $f(x, y)$  nella direzione del vettore  $\vec{u} = (1, 1)$ , nel punto  $(x, y) = (1, 1)$ .

---

ESERCIZIO 3. [5+2] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 2), \quad \vec{v}_3 = (1, 3, 3),$$

e si calcolino sia il prodotto scalare  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$  sia il prodotto vettoriale  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ .

FACOLTATIVO: Si calcoli il prodotto vettoriale  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ .

---

ESERCIZIO 4. [5+2] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

FACOLTATIVO: Si dimostri che  $A$  è invertibile e si calcoli la matrice inversa  $A^{-1}$ .

---

ESERCIZIO 5. [6+3] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1+x}}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} + (1 - \cos 2x)}{(\sin x)^2(1 - \cos x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^4) - \log(1-x^4)}{(e^{x^2} - 1)^2}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

---

ESERCIZIO 6. [6+2] Si determinino i punti di minimo e di massimo della funzione

$$f(x, y) = \frac{1 + xy}{1 + x^2}$$

nel dominio  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ .

FACOLTATIVO: Si discuta se la funzione ammette massimi e minimi assoluti in  $\mathbb{R}^2$ .

---