

Esercitazione di Matematica I (CdL in Scienze geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

09-01-2023

Simulazione d'esame di Matematica II del 1/10/2022

1. Si considerino il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

- calcolare la traccia ed il determinante di A ;
- stabilire se A è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;
- determinare i vettori $\vec{v} = A\vec{u}$ e $\vec{w} = A^2\vec{u}$;
- calcolare il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e verificare la disuguaglianza $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| |\vec{w}|$;
- calcolare il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ e verificare che $(2\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (-2\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = 0$;
- determinare l'angolo compreso tra i vettori \vec{v} e \vec{w} ;
- verificare che $\vec{z} = (0, 0, 5)$ è un autovettore di A e determinare l'autovalore associato.

2. Calcolare i seguenti limiti motivando la risposta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 \sin(2x^2)}{(e^{8x^3} - 1)^{4/3}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 \sin(2x^2)}{(e^{8x^3} - 1)^{4/3}}.$$

3. Studiare il grafico della funzione (\ln è il logaritmo naturale)

$$f(x) = 3x \ln(x^2).$$

In particolare:

- determinare il dominio di definizione (discutendo eventuali simmetrie) e il segno della funzione;
- studiare il comportamento della funzione ai bordi del dominio di definizione e stabilire l'eventuale esistenza di asintoti;
- determinare gli intervalli di monotonia ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;
- studiare la concavità.
- [**Facoltativo**: determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = -1$].

4. Si consideri la funzione

$$F(x, y) = -e^{x^2 - xy + y^2}.$$

- Stabilire se la derivata direzionale di F lungo $\vec{v} = (3, \pi)$ nel punto $(x, y) = (1, -1)$ è positiva o negativa;
- Stabilire se il punto $(x, y) = (0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.