

Esercitazione di Matematica I (CdL in Scienze geologiche)

Anno Accademico 2022-2023

13-01-2023

Prova scritta di Matematica II del 8-11-2022

1. Si considerino il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$:

- calcolare la traccia ed il determinante di A ;
- stabilire se A è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;
- determinare i vettori $\vec{v} = A\vec{u}$ e $\vec{w} = A^2\vec{u}$;
- calcolare il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e verificare la disuguaglianza $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| |\vec{w}|$;
- calcolare il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ e verificare che $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 0$;
- determinare l'angolo compreso tra i vettori \vec{v} e \vec{w} ;
- verificare che $\vec{z} = (1, 1, \sqrt{3})$ è un autovettore di A e determinare l'autovalore associato.

2. Calcolare i seguenti limiti motivando la risposta (ln è il logaritmo naturale):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 5x^4)}{(\ln(1 + 2x))^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(3x^2 + 5x^4)}{(\ln(1 + 2x))^2}.$$

3. Studiare il grafico della funzione (ln è il logaritmo naturale)

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

In particolare:

- determinare il dominio di definizione e il segno della funzione;
- calcolare i limiti a cui tende la funzione ai bordi del dominio di definizione e stabilire l'eventuale esistenza di asintoti;
- determinare gli intervalli di monotonia ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;
- studiare la concavità.
- [**Facoltativo:** determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x = 1$].