

**Analisi Matematica per le Applicazioni**  
**CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2023/2024**

Prova scritta - Primo appello (10-01-2024)

ESERCIZIO 0. [4\*]

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione del primo ordine  $y' = 2x$ .

2. Si calcoli l'integrale doppio  $\iint_{\Omega} dx dy$ , dove  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x\}$ .

3. Si risolva il problema di Cauchy  $\begin{cases} y' = -x^2 y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

4. Si determinino massimi e minimi della funzione  $f(x, y) = x$  in  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ .

ESERCIZIO 1. [6] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^x(1 - y^2 x) - 1}{yx^2 e^x}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

SUGGERIMENTO: *Può essere utile considerare la sostituzione  $z = xy$ .*

ESERCIZIO 2. [6] Si trovi la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali lineari in  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + y_2. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [6] Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale  $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$ .

ESERCIZIO 4. [6] Si determinino massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

nell'insieme  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1, 2x - 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\}$ .

ESERCIZIO 5. [6] Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} e^{x^2} dx dy,$$

dove  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 3y \leq x \leq 3\}$ .

ESERCIZIO 6. [6] Sia data la forma differenziale in  $\mathbb{R}^2$

$$\omega = e^y dx + x e^y dy,$$

1. si discuta se la forma differenziale sia esatta;

2. si calcoli l'integrale  $\int_{\gamma} \omega$ , dove  $\gamma(t) = (t, t^2)$  con  $t \in [0, 1]$ ;

3. si risponda alle stesse domande per la forma differenziale  $\omega = e^y dx + x e^y dy + (z + 1)e^z dz$  in  $\mathbb{R}^3$ , calcolando l'integrale lungo  $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$  con  $t \in [0, 1]$ .