

Analisi Matematica per le Applicazioni
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2023/2024

Prova scritta - Terzo appello (03-04-2024)

ESERCIZIO 0. [4*]

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione del primo ordine $y' - y = x$.

2. Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz$, dove $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

3. Si risolva il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = xy, \\ y(0) = -e. \end{cases}$$

4. Si determinino massimi e minimi della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$.

ESERCIZIO 1. [7] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y(1+y^2)}{(x^2+1)(1-y^2)}, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

e si determini l'intervallo massimale per cui essa è definita.

ESERCIZIO 2. [5] Si trovi la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari in \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2, \end{cases}$$

con condizioni iniziali $(y_1(0), y_2(0)) = (1, 0)$.

ESERCIZIO 3. [5] Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 4y' + 3y = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$.

ESERCIZIO 4. [6] Si determinino massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^4 - x^2 y^2 + 2y^2$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2, |xy| \leq 1\}$.

ESERCIZIO 5. [7] Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} (x^2 + x)(y^2 + y^4) \, dx \, dy,$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \pi, |y - \sin x| \leq 1\}$.

ESERCIZIO 6. [6] Sia data la forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\omega = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dy,$$

1. si discuta se la forma differenziale sia chiusa e se sia esatta;
2. si calcoli l'integrale di seconda specie di ω lungo la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, percorsa in senso antiorario, dove γ_1 è l'arco di circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine che collega il punto $(1, 0)$ al punto $(0, -1)$ in senso antiorario e γ_2 è il segmento che unisce il punto $(0, -1)$ al punto $(1, 0)$.