Analisi Matematica per le Applicazioni
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2023/2024

Prova scritta - Quinto appello (03-07-2024)

ESERCIZIO 0. [4*]

1. Si determini la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria $y'' = x^2$ con dati iniziali $y(0) = y'(0) = 1$.

2. Si calcoli l'integrale doppio $\iint_{\Omega} \frac{y}{x^2} dx dy$, dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

3. Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -y^4 \sin x, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

4. Si determinino massimi e minimi di $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

ESERCIZIO 1. [6] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{(x^2 + 1)y}{(x^2 + x) \log y}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. [6] Si trovi la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y_1' = 11y_1 - 11y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 5y_2, \\ y_1(0) = y_2(0) = 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [6] Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$.

ESERCIZIO 4. [6] Si determinino massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2, xy \leq 1\}$.

ESERCIZIO 5. [6] Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_{\Omega} \frac{xyz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz,$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

ESERCIZIO 6. [6] Si calcoli l'integrale curvilineo di prima specie in $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\gamma} f ds,$$

dove f è la funzione $f(x, y) = x^2 \sqrt{1 + y^2}$ e γ è la curva descritta da $\gamma(t) = (t, e^t)$ per $t \in [-\log 2, \log 2]$.