

Analisi Matematica per le Applicazioni
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2023/2024

Prova scritta - Sesto appello (05-09-2024)

ESERCIZIO 0. [4*]

1. Si determini la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria $y' = 2xy$ con dato iniziale $y(0) = -1$.

2. Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_{\Omega} e^x dx dy dz$, dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z \leq y \leq x \leq 1\}$.

3. Si risolva il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = y^2 x \sin x, \\ y(0) = -4. \end{cases}$$

4. Si determinino massimi e minimi di $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

ESERCIZIO 1. [6] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (3 + \cos^2 y)(1 + \cos^2 x) \frac{\cos x}{\cos y}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. [6] Si trovi la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari in \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2, \\ (y_1(0), y_2(0)) = (2, 3). \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [6] Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + y = (x + 1) \sin x + \sin 2x$.

ESERCIZIO 4. [6] Si determinino massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 2, (x + 1)^2 + y^2 \leq 2\}$.

ESERCIZIO 5. [6] Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_{\Omega} \frac{x^2 z}{x^2 + y^2 + z} dx dy dz,$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

ESERCIZIO 6. [6] Sia considerino in \mathbb{R}^2 la forma differenziale

$$\omega = (x^2 + y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$$

e la curva chiusa γ costituita dal segmento che unisce l'origine con il punto $(1, 1)$ e dall'arco di circonferenza di raggio $r = 1$ e centro $(0, 1)$ che unisce l'origine con il punto $(1, 1)$ procedendo in senso antiorario.

1. Si calcoli l'integrale curvilineo di seconda specie $\int_{\gamma} \omega$, dove la curva γ è percorsa in senso antiorario.
2. si discuta se la forma differenziale ω è esatta.