Raccolta esercizi Analisi 2

Pietro Caputo

Esercizi per il corso di Analisi per le Applicazioni
Ingegneria Meccanica, Roma Tre.

Contents

In progress, last update: February 17, 2022

Per eventuali segnalazioni scrivere a pietro.caputo@uniroma3.it.

1 Equazioni differenziali

Esercizio 1.1. *Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'(x) = -\frac{5}{x}\,y(x) + \frac{2\,e^{x^2}}{x^4}, \tag{1.1}$$

nell'intervallo $I = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Soluzione: L'equazione è del primo ordine lineare, della forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ con a, b continue nell'intervallo I. Ponendo $A(x) = \int a(x)dx$, con il metodo della variazione della costante troviamo che la soluzione generale della (1.1) è data da

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)dx. \tag{1.2}$$

Nel nostro caso abbiamo

$$A(x) = \int \left(-\frac{5}{x}\right)dx = -\log(x^5) + \text{cost.}$$

Inoltre

$$e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)dx = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \frac{2\,e^{x^2}}{x^4}\,dx = x^{-5} \int x^5\,\frac{2\,e^{x^2}}{x^4}\,dx = x^{-5} \int 2xe^{x^2} dx = x^{-5}(e^{x^2} + \text{cost.}).$$

Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = x^{-5}(e^{x^2} + c), \qquad x > 0$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.2. *Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale, nell'intervallo* $I = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$*:*

$$y'(x) + \frac{y(x)}{2x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 0. \tag{1.3}$$

Soluzione: L'equazione è del primo ordine lineare, della forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ con a, b continue nell'intervallo I. Dunque la soluzione generale è data dalla (1.2). Nel nostro caso abbiamo

$$A(x) = \int \left(-\frac{1}{2x}\right)dx = -\log(\sqrt{x}) + \text{cost.}$$

Allora

$$e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)dx = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int 3dx = -\frac{1}{\sqrt{x}}(3x + \text{cost.}).$$

Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = -3\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.3. *Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale, per* $x \in I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*:*

$$y'(x) = \tan(x)y(x) + \sqrt{\sin(x)}. \tag{1.4}$$

Soluzione: L'equazione è del primo ordine lineare, della forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ con a, b continue nell'intervallo I. Dunque la soluzione generale è data dalla (1.2). Abbiamo

$$A(x) = \int \tan(x)dx = -\log(\cos(x)) + \text{cost.}$$

Allora

$$e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)dx = \frac{1}{\cos(x)} \int \cos(x)\sqrt{\sin(x)}\, dx = \frac{1}{\cos(x)} \left(\frac{2}{3}(\sin(x))^{3/2} + \text{cost.}\right).$$

Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = \frac{2\sqrt{\sin^3(x)}}{3\cos(x)} + \frac{c}{\cos(x)}, \qquad x \in (0, \pi/2),$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

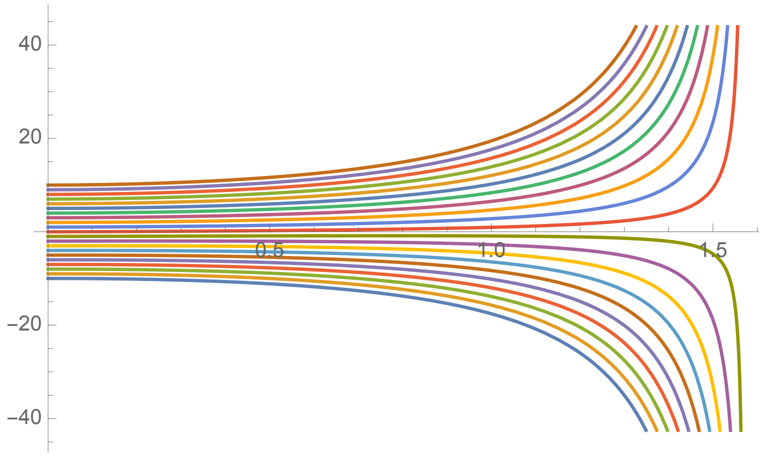

Figure 1.1: Grafico delle soluzioni dell'esercizio 1.3 per valori interi di c tra -10 e 10.

Esercizio 1.4. *Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale, per $x \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:*

$$y'(x) = \tan(x)y(x) + \sin(x). \tag{1.5}$$

Se $y(\pi/4) = \frac{5}{2\sqrt{2}}$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di y nel punto $x = \pi/4$.

Soluzione: L'equazione è del primo ordine lineare, della forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ con a, b continue nell'intervallo I. Allora la soluzione generale è data dalla (1.2). Abbiamo

$$A(x) = \int \tan(x)dx = -\log(\cos(x)) + \text{cost.}$$

Allora

$$e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)dx = \frac{1}{\cos(x)} \int \cos(x)\sin(x)\, dx = \frac{1}{\cos(x)} \left(\frac{1}{2}\sin^2(x) + \text{cost.}\right).$$

Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = \frac{\sin^2(x)}{2\cos(x)} + \frac{c}{\cos(x)}, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

dove $c \in \mathbb{R}$. Se $y(\pi/4) = \frac{5}{2\sqrt{2}}$ allora $c = 1$. Dunque

$$y'(\pi/4) = \tan(\pi/4)y(\pi/4) + \sin(\pi/4) = \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2\sqrt{2}}.$$

Ne segue che la retta tangente al grafico di y ha equazione $r(x) = y(\pi/4) + y'(\pi/4)(x - \pi/4)$ ossia

$$r(x) = \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{7}{2\sqrt{2}}(x - \pi/4).$$

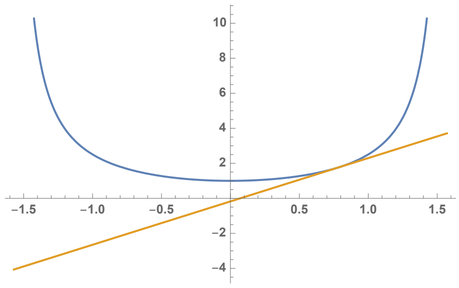

Figure 1.2: Soluzione dell'esercizio 1.4 e retta tangente in $x = \pi/4$.

Esercizio 1.5. *Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale:*

$$y'(x) - (y(x) + 1)\sin(x) = \sin(x)\cos(x). \tag{1.6}$$

Soluzione: L'equazione è del primo ordine lineare, della forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$. Le funzioni a, b sono continue su tutto $\mathbb{R}$ dunque possiamo risolvere per ogni $x \in \mathbb{R}$ senza limitazioni sul dominio. Ponendo $A(x) = \int a(x)dx$, la soluzione generale è data da

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)dx.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$A(x) = \int \sin(x)dx = -\cos(x) + \text{cost}.$$

Allora

$$e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)dx = e^{-\cos(x)} \int e^{\cos(x)} \sin(x)(\cos(x) + 1)\, dx.$$

Con la sostituzione $s = \cos(x)$, e poi integrando per parti troviamo

$$\int e^{\cos(x)} \sin(x)(\cos(x) + 1)\, dx = -\int (s + 1)e^s ds = -se^s + \text{cost}.$$

Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = e^{-\cos(x)} \left(-\cos(x)e^{\cos(x)} + c\right) = -\cos(x) + c\, e^{-\cos(x)} \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

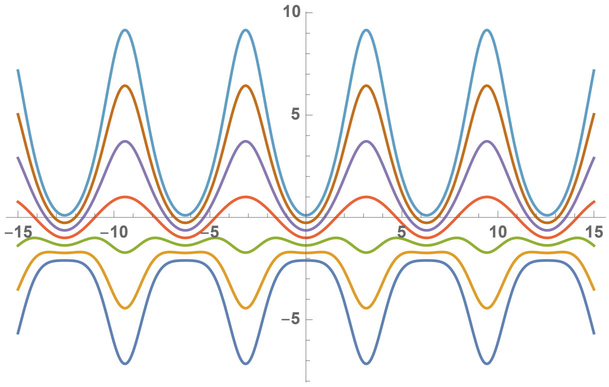

Figure 1.3: Soluzioni dell'esercizio 1.6 per valori interi di c tra -3 e 3.

Esercizio 1.6. *Trovare la soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) - (y(x) - 3)\cos(x) = \sin(x)\cos(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Soluzione: Ragionando come in Esercizio 1.5 si ha la soluzione

$$y(x) = 2 - 2e^{\sin(x)} - \sin(x).$$

Esercizio 1.7. *Trovare la soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = -\tan(x)y(x) + \cos^3(x) \\ y(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{1.8}$$

Soluzione: Ragionando come in Esercizio 1.5, e ricordando che $\int \cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$, si ha la soluzione

$$y(x) = (\tfrac{3}{4} - \tfrac{\pi}{8})\cos(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(x)\sin(2x).$$

Esercizio 1.8. *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione*

$$y'(x) = \cos(x)(y(x) + \sin(x)). \tag{1.9}$$

Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione che ha come tangente nel punto $x_0 = 0$ la retta $r(x) = -x + \lambda$.

Soluzione: Ragionando come nell'esercizio 1.5, troviamo le soluzioni

$$y(x) = e^{\sin(x)}(c+1) - \sin(x) - 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

per ogni $c \in \mathbb{R}$. La retta tangente in $x_0 = 0$ vale

$$r(x) = y(0) + y'(0)\,x$$

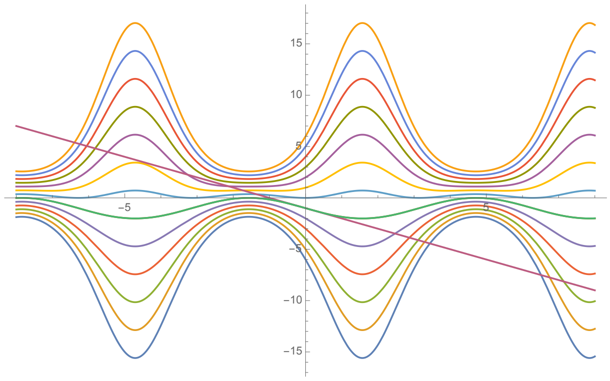

Figure 1.4: Soluzioni dell'esercizio 1.8 per valori interi di c tra -6 e 6, e retta tangente in $x = 0$ con coefficiente angolare -1. Tra le soluzioni, l'unica curva che ha questa retta come tangente in $x_0 = 0$ è $y(x) = -\sin(x) - 1$ che corrisponde a $c = -1$.

e dunque se $r(x) = -x + \lambda$ si deve avere $y(0) = \lambda$, $y'(0) = -1$. Ma in $x = 0$ si deve avere $y'(0) = \cos(0)(y(0) + \sin(0)) = y(0)$. Dunque una tale soluzione esiste se e solo se $\lambda = -1$ e in quel caso $c = -1$, ossia la soluzione è

$$y(x) = -\sin(x) - 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.9. *Trovare la soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} \\ y(\pi/3) = 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

Specificare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Scrivere l'equazione della retta tangente alla soluzione nel punto $x = 0$.

Soluzione: L'equazione è non lineare a variabili separabili. Separando le variabili troviamo la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{2} + 2\sqrt{\cos(x)}},$$

che è ben definita in un intorno di $x_0 = \pi/3$ con $y(\pi/3) = 1$. Poiché l'equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in forma locale, sappiamo che esiste un intervallo massimale I che contiene $\pi/3$ in cui è definita l'unica soluzione. Questo intervallo coincide con l'intervallo massimo $I \subset \mathbb{R}$ tale che a) $\pi/3 \in I$, b) $\cos(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, e c) $1 - \sqrt{2} + 2\sqrt{\cos(x)} \neq 0$ per ogni $x \in I$. Le condizioni a) e b) mostrano che $I \subset (-\pi/2, \pi/2)$, mentre la c) indica che $\cos(x) \neq (\sqrt{2} - 1)^2/4$. Allora

$$I = \left(-\arccos\left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}\right), \arccos\left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}\right)\right).$$

In $x_1 = 0$ si ha $y(0) = 1/(3 - \sqrt{2})$ e dunque

$$y'(0) = y(0)^2 \frac{\sin(0)}{\sqrt{\cos(0)}} = 0.$$

Allora la retta tangente alla soluzione in $x = 0$ è orizzontale, con equazione $r(x) = \frac{1}{3-\sqrt{2}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.10. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = \cot(x)\, y(x) - 2\sin(x) \\ y(\pi/4) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Specificare l'intervallo massimale di definizione della soluzione. Scrivere l'equazione della retta tangente alla soluzione nel punto $x = \pi/2$.

Soluzione: È un'equazione lineare del primo ordine e dunque la soluzione esiste ed è unica in tutto l'intervallo I di definizione dell'equazione differenziale: per avere $a(x) = \cot(x)$ continua e poiché vogliamo inlcudere il punto $x_0 = \pi/4$ prendiamo l'intervallo $I = (0, \pi)$. Con i metodi usuali troviamo la soluzione

$$y(x) = \frac{\pi}{2}\sin(x) - 2x\sin(x).$$

In particolare, si ha $y(\pi/2) = -\frac{\pi}{2}$ e dunque $y'(\pi/2) = \cot(\pi/2)\, y(\pi/2) - 2\sin(\pi/2) = -2$. Allora la retta tangente a y in $x = \pi/2$ ha equazione $r(x) = -\frac{\pi}{2} - 2(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 2x$.

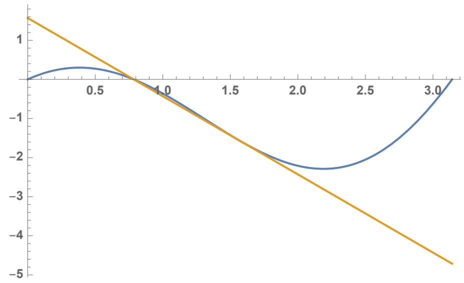

Figure 1.5: Soluzione dell'esercizio 1.10 e retta tangente in $x = \pi/2$.

Esercizio 1.11. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = -\tan(x)\, y(x) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} \\ y(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{1.12}$$

Calcolare $y''(\pi/4)$.

Soluzione: Ragionando come nell'esercizio (1.10) troviamo la soluzione

$$y(x) = \left(1 + \frac{\log 2}{2}\right)\cos(x) + \cos(x)\log(\sin(x)).$$

Derivando due volte si ha $y''(\pi/4) = -5/\sqrt{2}$.

Esercizio 1.12. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{2y(x)}{x} + \frac{x^2}{x^2+1} \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{1.13}$$

Specificare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Scrivere l'equazione della retta tangente alla soluzione nel punto $x = \sqrt{3}$.

Soluzione: È un'equazione lineare del primo ordine. Il problema di Cauchy è ben posto su tutto l'intervallo $I = (0, \infty)$ e dunque la soluzione esiste ed è unica su tutto I. Con i metodi usuali troviamo la soluzione
$$y(x) = (2 - \tfrac{\pi}{4})x^2 + x^2 \arctan(x).$$
In particolare, si ha $y(\sqrt{3}) = 6 + \frac{\pi}{4}$. Allora la retta tangente ha equazione $r(x) = y(\sqrt{3}) + y'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 6 + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{24+\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{4}\right)(x - \sqrt{3})$.

Esercizio 1.13. *Risolvere il problema di Cauchy:*
$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^3 \cos^2(x) \sin(x) \\ y(\pi) = -1 \end{cases} \tag{1.14}$$

Soluzione: Notiamo che per il teorema di esistenza e unicità esiste un intervallo massimale I che contiene $x_0 = \pi$ tale che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione definita su tutto I. Separando le variabili otteniamo
$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^3}\,dx = \int \cos^2(x)\sin(x)\,dx.$$
Allora $-(2y(x))^{-2} = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$. Allora $\frac{3}{\cos^3(x) - 3C} = 2y(x)^2$. Per $x = \pi$ si ha $y(\pi) = -1$ e dunque scegliamo la soluzione negativa $y(x) = -\sqrt{\frac{3}{2\cos^3(x) - 6C}}$. Sostituendo $y(\pi) = -1$ si ha $6C = -5$ e dunque la soluzione è data da:
$$y(x) = -\sqrt{\frac{3}{2\cos^3(x) + 5}}.$$
Essendo la soluzione ben definita su tutto $\mathbb{R}$ e essendo la funzione $\cos^2(x)\sin(x)$ in (1.14) continua su tutto $\mathbb{R}$, si ha che l'intervallo massimale I è uguale a $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.14. *Risolvere il problema di Cauchy*
$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \tan(x) \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases} \tag{1.15}$$
Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Soluzione: Per il teorema di esistenza e unicità esiste un intervallo massimale I che contiene $x_0 = \pi/4$ tale che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione definita su tutto I. Separando le variabili otteniamo
$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx = \int \tan(x)\,dx.$$
Dunque
$$y(x) = \frac{1}{\log(\cos(x)) + c}.$$
Ponendo $y(\pi/4) = 1$,
$$y(x) = \frac{2}{2\log(\cos(x)) + 2 + \log(2)}.$$
La soluzione è ben definita in ogni intervallo I tale che se $x \in I$ si ha $\cos(x) > 0$ e $2\log(\cos(x)) + 2 + \log(2) \neq 0$. Poiché vogliamo $\pi/4 \in I$ dobbiamo prendere $I \subset (-\pi/2, \pi/2)$ per avere $\cos(x) > 0$. La condizione

$2\log(\cos(x)) + 2 + \log(2) = 0$ è equivalente a $\cos(x) = e^{-1-\frac{1}{2}\log(2)}$, ossia $x = \pm a$ dove $a = \arccos(e^{-1-\frac{1}{2}\log(2)})$. Questo numero soddisfa $a \approx 1.307$ e dunque $a < \pi/2$. In conclusione, l'intervallo massimale per l'esistenza della soluzione $y(x)$ è dato da

$$I = \left(-\arccos\left(e^{-1-\frac{1}{2}\log(2)}\right), \arccos\left(e^{-1-\frac{1}{2}\log(2)}\right)\right).$$

Esercizio 1.15. *Per ogni $\alpha \in (0,1)$, trovare almeno due soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^\alpha \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Soluzione: Fissiamo $\alpha \in (0,1)$. La funzione $f(x,y) = y^\alpha$ non è localmente Lipschitz in nessun intorno di $y = 0$, dunque non possiamo garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. In effetti possiamo mostrare che la soluzione non è unica. Notiamo che si ha sempre la soluzione stazionaria $y(x) \equiv 0$. Per trovarne un'altra, procediamo come segue. Separando le variabili si ha $\frac{y'}{y^\alpha} = 1$, e integrando otteniamo

$$\frac{y^{1-\alpha}(x)}{1-\alpha} = x + C.$$

La condizione $y(0) = 0$ implica $C = 0$, e dunque per $x \geq 0$ possiamo porre $y(x) = ((1-\alpha)x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Per $x < 0$ possiamo prendere $y(x) = 0$, ossia definiamo la funzione

$$y(x) = \begin{cases} ((1-\alpha)x)^{\frac{1}{1-\alpha}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Questa funzione è di classe $\mathscr{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ soddisfa $y'(x) = y(x)^\alpha$ (incluso il punto $x = 0$), dunque abbiamo trovato una soluzione di (1.16). Allo stesso modo si ha che per ogni $t \geq 0$ fissato, la funzione

$$y_t(x) = \begin{cases} ((1-\alpha)(x-t))^{\frac{1}{1-\alpha}} & x \geq t \\ 0 & x < t \end{cases} \tag{1.18}$$

è una soluzione di (1.16). In conclusione, per ogni $\alpha \in (0,1)$ fissato, esistono infinite soluzioni del problema di Cauchy (1.16). Ricordiamo che se invece $\alpha \geq 1$, allora la funzione $f(x,y) = y^\alpha$ è localmente Lipschitz e dunque si ha unicità: l'unica soluzione del problema di Cauchy (1.16) per $\alpha \geq 1$ è la soluzione stazionaria $y(x) \equiv 0$.

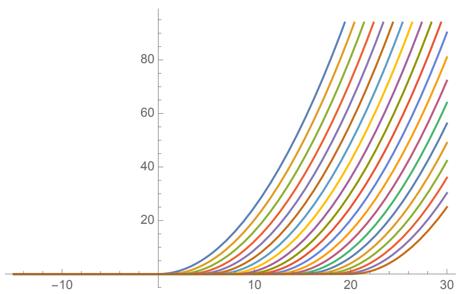

Figure 1.6: Soluzioni del problema di Cauchy (1.16) della forma (1.18) per $\alpha = \frac{1}{2}$ e per valori interi di t tra 0 e 20.

Esercizio 1.16. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = (1+x^2)\sqrt{y(x)} \\ y(1) = \frac{4}{9} \end{cases} \tag{1.19}$$

Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione trovata. Quanto vale $y(0)$? La soluzione è unica?

Soluzione: La funzione $f(x,y) = (1+x^2)\sqrt{y}$ è localmente Lipschitz rispetto alla variabile y in un intorno di $y_0 = 4/9$, dunque per il teorema di esistenza e unicità esiste un intervallo massimale I che contiene $x_0 = 1$ tale che su I si ha un'unica soluzione del problema di Cauchy. Separando le variabili otteniamo

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}\,dx = \int (1+x^2)\,dx.$$

Dunque

$$2\sqrt{y(x)} = x + \frac{x^3}{3} + c.$$

Ponendo $y(1) = 4/9$ otteniamo $c = 0$ e dunque

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{9}x^6\right).$$

La soluzione è derivabile e soddisfa (1.19) su tutto $\mathbb{R}$ dunque l'intervallo massimale per l'esistenza della soluzione è $\mathbb{R}$. Inoltre, si ha $y(0) = 0$. Notiamo dunque che questa soluzione interseca la soluzione stazionaria $y(x) \equiv 0$ nel punto $x = 0$. Ciò non contraddice l'unicità poiché la funzione $f(x,y) = (1+x^2)\sqrt{y}$ non è localmente Lipschitz nella variabile y in nessun intorno di $y = 0$.

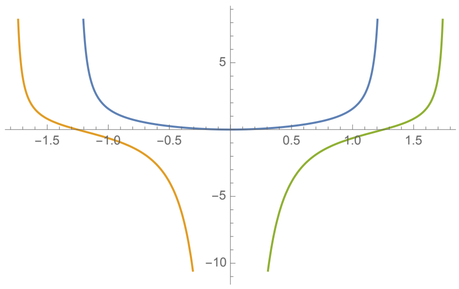

Figure 1.7: Soluzioni dell'esercizio 1.17 corrispondenti a $k = -1, 0, 1$.

Esercizio 1.17. *Per $k = -1, 0, +1$, risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = 2xy(x)^2 + 2x \\ y\left(k\sqrt{\pi/2}\right) = 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

In ciascun caso, dire se la soluzione trovata è unica e determinarne l'intervallo massimale di esistenza.

Soluzione: L'equazione si può scrivere nella forma $y' = 2x(y^2+1)$. Separando le variabili otteniamo

$$\arctan(y(x)) = x^2 + C\,.$$

Dunque la soluzione generale è $y(x) = \tan(x^2+C)$. Se $x = k\sqrt{\pi/2}$ si ha $y(x) = 0$ e dunque $\tan(k^2\pi/2+C) = 0$, che implica $k^2\pi/2 + C = n\pi$ per qualche intero n. Se k è pari, allora k^2 è pari e possiamo porre $C = 0$. Se k è dispari allora k^2 è dispari e possiamo porre $C = \pi/2$. Notiamo inoltre che $\tan(x^2+\pi/2) = -\cot(x^2)$ per ogni x. Dunque per ogni k intero il problema di Cauchy (1.20) ha la soluzione

$$y(x) = \begin{cases} \tan(x^2) & k \text{ pari} \\ -\cot(x^2) & k \text{ dispari} \end{cases}$$

La funzione $f(x,y) = 2x(y^2+1)$ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità, e dunque le soluzioni trovate sono le uniche, ciascuna con il proprio intervallo massimale di esistenza I_k, che può essere determinato come segue.

La funzione $\tan(x^2)$ è continua e derivabile negli intervalli individuati dalle condizioni $x^2 \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ per n interi. Se $k = 0$, l'intervallo massimale contenente $k\sqrt{\pi/2} = 0$ è $I_0 = (-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$. Allora per $k = 0$ si ha l'unica soluzione $y(x) = \tan(x^2)$ con intervallo massimale $I_0 = (-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$.

La funzione $-\cot(x^2)$ è continua e derivabile negli intervalli individuati dalle condizioni $x^2 \neq n\pi$ per n interi. Se $k = 1$ l'intervallo massimale contenente $k\sqrt{\pi/2} = \sqrt{\pi/2}$ è $I_1 = (0, \sqrt{\pi})$. Allora per $k = 1$ si ha l'unica soluzione $y(x) = -\cot(x^2)$ con intervallo massimale $I_1 = (0, \sqrt{\pi})$. Allo stesso modo troviamo che per $k = -1$, l'unica soluzione è $y(x) = -\cot(x^2)$ con intervallo massimale $I_{-1} = (-\sqrt{\pi}, 0)$; si veda la figura 1.7.

Esercizio 1.18. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{y(x)^2}{x} \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1.21}$$

Soluzione: Possiamo risolvere nella regione $I = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. L'equazione è del tipo Bernoulli

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^{\alpha}\,,$$

con $\alpha = 2$, $a(x) = 1/x$ e $b(x) = -1/x$. Dunque dividendo per y^{α} si arriva a un'equazione lineare non omogenea:

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = \frac{1}{x}\,y(x)^{-1} - \frac{1}{x}, \qquad z(x) = y(x)^{-1},$$
$$z'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2} = -\frac{1}{x}\,z(x) + \frac{1}{x}\,.$$

L'equazione lineare omogenea $z'(x) = -\frac{1}{x}\,z(x)$ ha soluzione $z_H(x) = e^{A(x)}$ dove

$$A(x) = -\int \frac{dx}{x} = -\log(x) + \text{cost.}$$

è una primitiva di $-1/x$. Dunque $z_H(x) = \frac{C}{x}$, $x > 0$, dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Una soluzione particolare $\bar{z}(x)$ della equazione lineare non omogenea $z'(x) = -\frac{1}{x}\,z(x) + \frac{1}{x}$ si trova con il metodo usuale della variazione della costante e si ottiene

$$\bar{z}(x) = e^{A(x)} \int \frac{1}{x}\,e^{-A(x)}dx = \frac{1}{x}\cdot x = 1.$$

In conclusione, la soluzione generale dell'equazione $z'(x) = -\frac{1}{x} z(x) + \frac{1}{x}$ è data da $z = z_H + \bar{z}$ e dunque

$$z(x) = \frac{C}{x} + 1, \qquad x > 0.$$

Passando alla $y(x) = 1/z(x)$ si ha

$$y(x) = \frac{x}{C + x}, \qquad x > 0.$$

Ponendo $y(1) = 1/2$ si ha $C = 1$, e dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x}{x + 1}, \qquad x > 0.$$

Nota: una soluzione equivalente si poteva ottenere osservando che l'equazione

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{y(x)^2}{x} = \frac{1}{x} y(x)(1 - y(x))$$

ha variabili separabili.

Esercizio 1.19. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{2}{x}\, y(x) + 2x\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{1.22}$$

Soluzione: Possiamo risolvere nella regione $I = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. L'equazione è del tipo Bernoulli con $\alpha = 1/2$. Dunque dividendo per $\sqrt{y}$ si arriva a un'equazione lineare non omogenea:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = \frac{2}{x}\sqrt{y(x)} + 2x, \qquad z(x) = \sqrt{y(x)},$$

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = \frac{1}{x} z(x) + x\,.$$

L'equazione lineare non omogenea $z'(x) = \frac{1}{x} z(x) + x$ ha come soluzione generale

$$z(x) = Cx + x^2,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Per determinare C osserviamo che se $y(1) = 1$ allora $z(1) = 1$ e dunque $C = 0$. Allora $z(x) = x^2$ e la soluzione al problema di Cauchy è $y(x) = z(x)^2$, ossia

$$y(x) = x^4, \qquad x > 0.$$

Notiamo che se avessimo lasciato C indeterminata nella $z(x)$, prendendo $y(x) = z(x)^2 = (Cx + x^2)^2$ e ponendo successivamente $y(1) = 1$, avremmo trovato due soluzioni: $C = 0$ e $C = -2$. La prima soluzione corrisponde a $y(x) = x^4$, mentre la seconda corrisponde a $y(x) = 4x^2 - 4x^3 + x^4$. Mentre la prima è corretta, la seconda non è valida, come si può verificare osservando che non soddisfa $y'(x) = \frac{2}{x}\, y(x) + 2x\sqrt{y(x)}$ per ogni $x > 0$ (per esempio questa relazione non è vera in $x = 1$). Notiamo infine che la soluzione deve essere unica poiché in un intorno del punto $(1, 1)$ la funzione $f(x, y) = \frac{2}{x}\, y + 2x\sqrt{y}$ è continua e, nella variabile y, è localmente Lipschitz. L'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $I = (0, \infty)$.

Esercizio 1.20. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{4}{x}\, y(x) + 2x\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

Soluzione: Ragionando come nell'esercizio 1.19 troviamo la soluzione

$$y(x) = x^4(1 + \log(x))^2, \qquad x > 0.$$

La soluzione è unica, con intervallo massimale di esistenza $I = (0, \infty)$.

Esercizio 1.21. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{y(x)}{2x} = -\frac{4}{\sqrt{x}} \\ y(1) = -1 \end{cases} \tag{1.24}$$

Soluzione: Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Possiamo risolvere nella regione $I = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Gli argomenti usuali mostrano che l'unica soluzione è data da

$$y(x) = -\sqrt{x} - 4\sqrt{x}\log(x) \qquad x > 0.$$

Esercizio 1.22. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = 3\sin(x) \\ y(0) = 2, \ y'(0) = -\frac{3}{2} \end{cases} \tag{1.25}$$

Soluzione: Abbiamo un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea, a coefficienti costanti. L'integrale generale è dato da $y(x) = y_H(x) + \bar{y}(x)$ dove y_H è la soluzione generale della equazione omogenea $y''(x) - y(x) = 0$ e $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare di $y''(x) - y(x) = 3\sin(x)$. Si ha $y_H(x) = c_1e^{-x} + c_2e^x$. Inoltre una soluzione particolare si può trovare usando la forma

$$\bar{y}(x) = a\cos(x) + b\sin(x),$$

e sostituendo per trovare le costanti a, b si trova $b = -3/2$, $a = 0$, e dunque $\bar{y}(x) = -\frac{3}{2}\sin(x)$ è una soluzione. Altrimenti si poteva procedere con il metodo della variazione della costante. In ogni caso si ottiene la soluzione generale

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^x - \frac{3}{2}\sin(x)$$

Ponendo $y(0) = 2$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$ si ha $c_1 = c_2 = 1$, dunque

$$y(x) = e^{-x} + e^x - \frac{3}{2}\sin(x).$$

Esercizio 1.23. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = 4\cos(x) + \sin(x) \\ y(\pi/2) = 1/2, \ y'(\pi/2) = 1 \end{cases} \tag{1.26}$$

Soluzione: Ragionando come sopra si ha la soluzione

$$y(x) = e^{\pi/2 - x} - 2\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x).$$

Esercizio 1.24. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) = 3y(x) + 36x \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.27}$$

Soluzione: L'integrale generale è dato da $y(x) = y_H(x) + \bar{y}(x)$ dove y_H è la soluzione generale della equazione omogenea $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$ e $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare di $y''(x) - 2y'(x) = 3y(x) + 36x$. Il polinomio caratteristico dell'omogenea è $\lambda^2 - 2\lambda - 3$ che ha due radici distinte $\lambda = -1, \lambda = 3$. Allora

$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Una soluzione particolare si pu'o trovare ponendo

$$\bar{y}(x) = ax + b,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, e sostituendo nell'equazione non omogenea. Si ha $\bar{y}(x) = -12x + 8$. Dunque $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + 8 - 12x$. Ponendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ si trova $3c_2 - c_1 = 12$, $c_1 + c_2 = -8$, da cui $c_2 = 1$ e $c_1 = -9$. In conclusione,

$$y(x) = -9e^{-x} + e^{3x} + 8 - 12x\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy.

Esercizio 1.25. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''(x) = 2y'(x) + x^2 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

Soluzione: Ragionando come sopra si ha la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{7}{8}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.26. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \sin(x) \\ y(\pi/2) = 0, \ y'(\pi/2) = 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

Quanto vale $y''(\pi)$?

Soluzione: È un'equazione lineare, di secondo grado non omogenea. Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono $y_1(x) = \cos(x)$ e $y_2(x) = \sin(x)$. Con il metodo della variazione delle costanti cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y(x) = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x),$$

dove le funzioni A, B devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = g(x) \end{cases}$$

dove $g(x) = \sin(x)$. Usando la formula di Cramer si ottiene

$$A'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}, \quad B'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}$$

Il determinate Wronksiano a denominatore in questo case vale 1 e dunque si ha

$$A'(x) = -\sin^2(x), \qquad B'(x) = \cos(x)\sin(x).$$

Integrando si ha

$$A(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x), \qquad B'(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x).$$

In conclusione l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + (-\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4}\sin(2x))\cos(x) + \frac{1}{2}\sin^3(x)$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 0$ si ha $c_1 = \pi/4$ e $c_2 = -1/2$. In particolare, in $x = \pi$ si ha $y(\pi) = \pi/4$, e dunque usando $y''(\pi) + y(\pi) = \sin(\pi)$ troviamo $y''(\pi) = -\pi/4$.

Esercizio 1.27. *Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) + y(x) = \sin(x) \\ y(0) = \lambda,\ y'(0) = \mu \end{cases} \tag{1.30}$$

Soluzione: Ragionando come nell'Esercizio 1.26 si ha

$$y(x) = \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\left((\lambda - 1)e^{x/2} + \cos(x)\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) +$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\left((2\mu - \lambda + 1)e^{x/2} + \sqrt{3}\cos(x)\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Esercizio 1.28. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{3}{x}y'(x) + \frac{1}{x^2}y(x) = -\frac{1}{x} \\ y(1) = \frac{3}{4},\ y'(1) = -\frac{9}{4} \end{cases} \tag{1.31}$$

Determinare la retta tangente alla soluzione nel punto $x = 2$ e l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Soluzione: Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea. I coefficienti non sono costanti ma riconosciamo la forma di un'equazione di Eulero. Con la sostituzione $z(s) = y(e^s)$, si trova un'equazione lineare del secondo ordine, non omogenea, a coefficienti costanti:

$$z''(s) + 2z'(s) + z(s) = -e^s.$$

Questa si risolve con

$$z(s) = c_1 e^{-s} + c_2 s e^{-s} - \frac{1}{4} e^s.$$

Dunque

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 \log(x)}{x} - \frac{1}{4} x.$$

Ponendo $y(1) = 3/4$, $y'(1) = -\frac{9}{4}$ si trova $c_1 = -c_2 = 1$. Allora

$$y(x) = \frac{1}{x} - \frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{4} x, \qquad x > 0.$$

La soluzione è ben definita per ogni $x \in (0, \infty)$ e dunque l'intervallo massimale è $I = (0, \infty)$. Si ha $y(2) = -\frac{1}{2} \log(2)$, e $y'(2) = \frac{\log(2)-3}{4}$. La retta tangente in $x = 2$ si scrive $r(x) = y(2) + y'(2)(x - 2)$, ossia

$$r(x) = \frac{\log(2) - 3}{4} x - \log(2) + \frac{3}{2}.$$

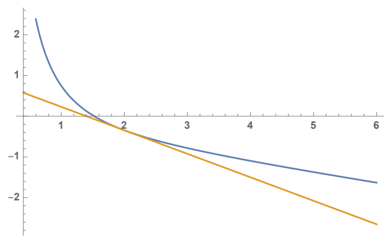

Figure 1.8: Soluzione dell'esercizio 1.28.

Esercizio 1.29. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{4}{x} y'(x) + \frac{2}{x^2} y(x) + \frac{1}{x} = 0 \\ y(-1) = 0, \ y'(-1) = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Soluzione: E' un'equazione di Eulero. Procedendo come nell'esercizio 1.28 si trova

$$y(x) = \frac{2 + 3x - x^3}{6x^2}, \qquad x < 0.$$

L'intervallo massimale è $(-\infty, 0)$.

Esercizio 1.30. *Risolvere il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{y(x)^2}{x^2} \\ y(e) = \frac{e}{2} \end{cases} \tag{1.33}$$

Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Soluzione: È un'equazione di Bernoulli che si linearizza introducendo $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$, con $\alpha = 2$. Risolvendo l'equazione lineare abbiamo l'unica soluzione nell'intervallo $(0, \infty)$:

$$y(x) = \frac{x}{1 + \log(x)}$$

La soluzione è unica in un intorno del punto $x_0 = e$. Inoltre la soluzione trovata è derivabile e soddisfa l'equazione differenziale in (1.33) per ogni $x > 0$ con $1 + \log(x) \neq 0$, ossia $x \neq 1/e$. Allora l'intervallo massimale per $y(x)$ è $I = (1/e, \infty)$.

Esercizio 1.31. *Determinare la soluzione del sistema:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2y_2(x) \\ y_2'(x) = -y_1(x) \end{cases} \tag{1.34}$$

che verifica le condizioni iniziali $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

Soluzione: È un sistema lineare omogeneo con coefficienti costanti, della forma $\vec{y}' = A\vec{y}$, dove la matrice A è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La traccia di A è 0 e il determinante è 2, dunque gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -i\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = i\sqrt{2}$. Risolvendo $A\vec{v} = -i\sqrt{2}\vec{v}$ troviamo $\vec{v}_1 = (i\sqrt{2}, 1)$ e risolvendo $A\vec{v} = i\sqrt{2}\vec{v}$ troviamo $\vec{v}_2 = (-i\sqrt{2}, 1)$. Dunque possiamo scrivere la soluzione generale nella forma $\vec{y}(x) = \alpha e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1 + \beta e^{\lambda_2 x}\vec{v}_2$, ovvero

$$y_1(x) = i\sqrt{2}\alpha e^{-i\sqrt{2}x} - i\sqrt{2}\beta e^{i\sqrt{2}x}, \quad y_2(x) = \alpha e^{-i\sqrt{2}x} + \beta e^{i\sqrt{2}x}.$$

Ponendo $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ si trova $\alpha = \beta = 1/2$ e dunque

$$y_1(x) = \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}x\right), \qquad y_2(x) = \cos\left(\sqrt{2}x\right).$$

Mostriamo come si può ottenere lo stesso risultato usando l'esponenziale di matrice. Dal precedente calcolo degli autovettori possiamo diagonalizzare A:

$$A = CDC^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre, calcoliamo

$$C^{-1} = \frac{1}{2i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} \\ -1 & i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} e^{xA} = Ce^{xD}C^{-1} &= \frac{1}{2i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}x} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{2}x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} \\ -1 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\sqrt{2}(e^{-i\sqrt{2}x} + e^{-i\sqrt{2}x}) & -2(e^{-i\sqrt{2}x} - e^{-i\sqrt{2}x}) \\ (e^{-i\sqrt{2}x} - e^{-i\sqrt{2}x}) & i\sqrt{2}(e^{-i\sqrt{2}x} + e^{-i\sqrt{2}x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2}x\right) & \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}x\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}x\right) & \cos\left(\sqrt{2}x\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In conclusione, per ogni dato iniziale $\vec{y}(0) = (y_1(0), y_2(0))$ si ha la soluzione

$$\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{y}(0) = \left(y_1(0)\cos\left(\sqrt{2}x\right) + y_2(0)\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}x\right), -\frac{y_1(0)}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}x\right) + y_2(0)\cos\left(\sqrt{2}x\right)\right) \tag{1.35}$$

Nel caso $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ troviamo

$$\vec{y}(x) = \left(\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}x\right), \cos\left(\sqrt{2}x\right)\right). \tag{1.36}$$

Per una soluzione alternativa si può osservare che il sistema (1.34), con le sostituzioni $y_2 = z$ e $y_1 = -z'$ diventa equivalente all'equazione di secondo grado omogenea a coefficienti costanti

$$z''(x) + 2z(x) = 0,$$

la cui soluzione generale è $z(x) = a\cos(\sqrt{2}x) + b\sin(\sqrt{2}x)$. Ponendo $z(0) = y_2(0) = 1$ e $z'(0) = -y_1(0) = 0$ si ha $a = 0$ e $b = 1$. Allora $z(x) = \cos(\sqrt{2}x)$, e dunque ritroviamo la (1.36) ponendo $\vec{y}(x) = (-z'(x), z(x))$.

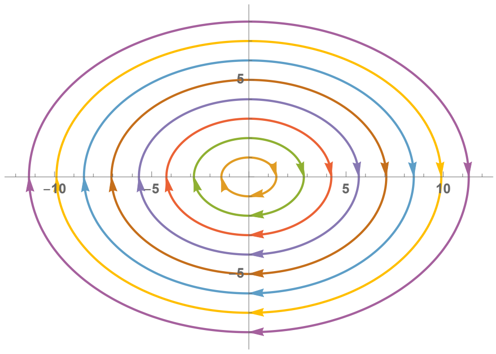

Figure 1.9: Grafico dei punto di coordinate $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$, al variare di $x \in [0, \sqrt{2}\pi]$, ricavati dall'equazione (1.35) e corrispondente ai diversi dati iniziali $(y_1(0), y_2(0)) = (0, k)$, $k = 0, \dots, 8$. Le frecce sono nel verso delle x crescenti

Esercizio 1.32. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x) \end{cases} \tag{1.37}$$

Scrivere la soluzione generale in termini dei due parametri $\vec{y}(0) = (y_1(0), y_2(0))$.

Soluzione: È un sistema lineare omogeneo con coefficienti costanti, della forma $\vec{y}' = A\vec{y}$, dove la matrice A è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che A ha i due autovalori

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

con autovettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), \qquad \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

La soluzione generale sarà allora una combinazione lineare delle due soluzioni linearmente indipendenti

$$\vec{v}_1 e^{\lambda_1 x}, \qquad \vec{v}_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Queste soluzioni sono a valori complessi. Per avere soluzioni reali notiamo che

$$e^{\lambda_1 x} = e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) + i\sin(\sqrt{3}x/2)), \qquad e^{\lambda_2 x} = e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) - i\sin(\sqrt{3}x/2))$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 e^{\lambda_1 x} &= e^{-x/2}\left(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}x/2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}x/2), \cos(\sqrt{3}x/2)\right) + \\
&\quad + ie^{-x/2}\left(\frac{1}{2}\sin(\sqrt{3}x/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}x/2), \sin(\sqrt{3}x/2)\right) \\
\vec{v}_2 e^{\lambda_2 x} &= e^{-x/2}\left(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}x/2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}x/2), \cos(\sqrt{3}x/2)\right) + \\
&\quad - ie^{-x/2}\left(\frac{1}{2}\sin(\sqrt{3}x/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}x/2), \sin(\sqrt{3}x/2)\right)
\end{aligned}$$

Allora possiamo prendere la soluzione generale a valori reali $\vec{y}(x) = \alpha\vec{w}(x) + \beta\vec{z}(x)$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{w}$ e $\vec{z}$ sono le due soluzioni reali linearmente indipendenti definite dalla parte reale e dalla parte immaginaria delle soluzioni trovate sopra:

$$\begin{aligned}
\vec{w}(x) &= e^{-x/2}\left(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}x/2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}x/2), \cos(\sqrt{3}x/2)\right), \\
\vec{z}(x) &= e^{-x/2}\left(\frac{1}{2}\sin(\sqrt{3}x/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}x/2), \sin(\sqrt{3}x/2)\right).
\end{aligned}$$

Osservando che $\vec{y}(0) = (y_1(0), y_2(0)) = \alpha(\frac{1}{2}, 1) + \beta(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, abbiamo $\alpha = y_2(0)$ e $\beta = \frac{2y_1(0)}{\sqrt{3}} - \frac{y_2(0)}{\sqrt{3}}$. Ne segue

$$\begin{aligned}
\vec{y}(x) &= (y_1(x), y_2(x)), \\
y_1(x) &= y_1(0)e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + \left(\frac{y_1(0)}{\sqrt{3}} - \frac{2y_2(0)}{\sqrt{3}}\right)e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2) \\
y_2(x) &= y_2(0)e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + \left(\frac{2y_1(0)}{\sqrt{3}} - \frac{y_2(0)}{\sqrt{3}}\right)e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Alla stessa conclusione potevamo giungere prendendo l'esponenziale della matrice A. Infatti, procedendo come nell'esercizio precedente si calcola

$$e^{xA} = e^{-x/2}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}x/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x/2) & -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x/2) \\ +\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x/2) & \cos(\sqrt{3}x/2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x/2) \end{pmatrix}$$

Dunque la (1.38) si ottiene anche tramite la formula $\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{y}(0)$.

Infine, notiamo che una soluzione si poteva anche ottenere osservando che l'equazione $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$ è equivalente alla equazione di secondo grado

$$z''(x) + z'(x) + z(x) = 0,$$

ponendo $y_1 = z$ e $y_2 = -z'$.

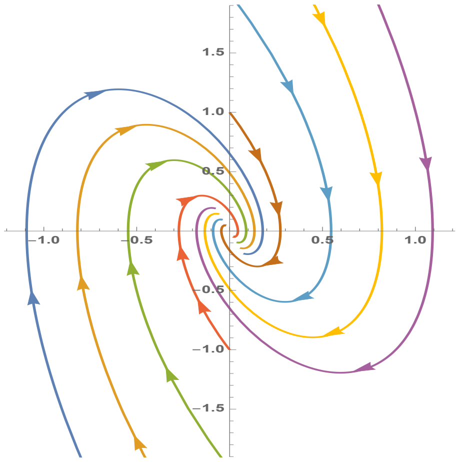

Figure 1.10: Grafico dei punti di coordinate $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$, al variare di $x \in [0, 3\pi]$, ricavati dall'equazione (1.38) e corrispondenti ai diversi dati iniziali $(y_1(0), y_2(0)) = (0, k)$, per interi $k = -4, \ldots, 4$. Le frecce sono nel verso delle x crescenti.

Esercizio 1.33. *Determinare la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = 2y_2(x) - y_1(x) \end{cases} \tag{1.39}$$

che verifica le condizioni iniziali a) $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$ *oppure b)* $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$.

Soluzione: È un sistema lineare omogeneo con coefficienti costanti, della forma $\vec{y}' = A\vec{y}$, dove la matrice A è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che A ha due autovalori uguali a $\lambda = 1$. Risolvendo $A\vec{v} = \vec{v}$ troviamo l'unica soluzione $\vec{v} = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dunque l'autovettore associato a $\lambda = 1$ è $\vec{v} = (1, 1)$ e abbiamo una soluzione $\vec{v}e^{\lambda x}$. Non avendo un autovettore $\vec{v}'$ linearmente indipendente da $\vec{v}$ per trovare una seconda soluzione linearmente indipendente proviamo con la forma

$$x\vec{v}e^{\lambda x} + (a, b)e^{\lambda x} = (xe^x + ae^x, xe^x + be^x),$$

per qualche $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare richiedendo che sia soddisfatta l'equazione differenziale. Inserendo nell'equazione differenziale si ottiene $(a, b) = (1, 2)$ e dunque due soluzioni linearmente indipendenti sono

$$(1, 1)e^x, \qquad (1 + x, 2 + x)e^x.$$

Allora la soluzione generale del sistema si scrive

$$\vec{y}(x) = \alpha(1, 1)e^x + \beta(1 + x, 2 + x)e^x = (\alpha + \beta + x\beta, \alpha + 2\beta + x\beta)e^x.$$

Se $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$ allora $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e dunque

$$\vec{y}(x) = (e^x, e^x),$$

è l'unica soluzione. Se invece $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ allora $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e dunque l'unica soluzione è

$$\vec{y}(x) = (-e^x + 2xe^x, e^x + 2xe^x).$$

Nota: alle stesse conclusioni si poteva arrivare anche osservando che il sistema è equivalente all'equazione di secondo grado

$$z'' - 2z' + z = 0,$$

ponendo $y_2 = z'$ e $y_1 = z$. A questo punto avremmo ottenuto la soluzione generale $z(x) = ae^x + bxe^x$ con coefficienti $a, b \in \mathbb{R}$ e dunque

$$\vec{y}(x) = (z(x), z'(x)) = (ae^x + bxe^x, ae^x + be^x + bxe^x).$$

Imponendo $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$ si ha $a = 1$ e $b = 0$, mentre per $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ si ha $a = -1$ e $b = 2$ e ritroviamo le stesse soluzioni viste sopra.

Notiamo infine che avremmo potuto risolvere anche usando la formula $\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{y}(0)$. In questo caso la matrice non è diagonalizzabile, poiché l'unico autovettore (diverso da $(0, 0)$) è (t, t) per $t \in \mathbb{R}$. Il calcolo dell'esponenziale di matrice in questo caso deve essere eseguito calcolando esplicitamente le potenze A^k per $k = 0, 1, \ldots$ Per induzione su k, si ottiene

$$A^k = \begin{pmatrix} (1-k) & k \\ -k & (1+k) \end{pmatrix}$$

Allora

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(1-k)}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k k}{k!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(1+k)}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)e^x & xe^x \\ -xe^x & (1+x)e^x \end{pmatrix}$$

Usando questa espressione nella formula $\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{y}(0)$ troviamo la soluzione generale:

$$\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{y}(0) = (y_1(0)(1-x)e^x + y_2(0)xe^x, -y_1(0)xe^x + y_2(0)(1+x)e^x), \tag{1.40}$$

che è equivalente alla soluzione trovata sopra.

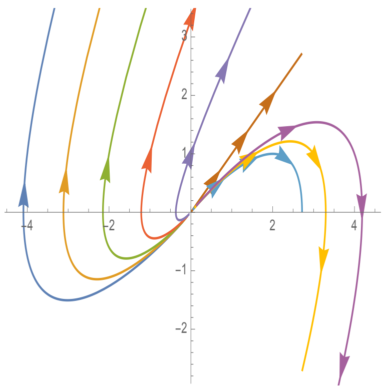

Figure 1.11: Grafico dei punti di coordinate $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$, al variare di $x \in [-5, 1]$, ricavati dall'equazione (1.40) e corrispondenti ai diversi dati iniziali $(y_1(0), y_2(0)) = (k, 1)$, per interi $k = -4, \ldots, 4$. Le frecce sono nel verso delle x crescenti.

Esercizio 1.34. *Determinare la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = -2y_1(x) - 2y_2(x) \end{cases} \tag{1.41}$$

al variare delle condizioni iniziali $\vec{y}(2) = (y_1(2), y_2(2)) = (0, s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Soluzione: È un sistema lineare omogeneo con coefficienti costanti, della forma $\vec{y}' = A\vec{y}$, dove la matrice A è data da
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$
Gli autovalori sono $0, -1$ e gli autovettori associati sono $(-1, 1)$ e $(1, -2)$ rispettivamente. Allora possiamo diagonalizzare A:
$$A = CDC^{-1}\,, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
La soluzione è dunque $\vec{y}(x) = e^{(x-2)A}\vec{y}(2)$, dove $e^{(x-2)A}$ si scrive
$$\begin{aligned} e^{(x-2)A} &= Ce^{(x-2)D}C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(x-2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - e^{-(x-2)} & 1 - e^{-(x-2)} \\ -2 + 2e^{-(x-2)} & -1 + 2e^{-(x-2)}. \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.42}$$
Se $\vec{y}(2) = (y_1(2), y_2(2)) = (0, s)$, al variare di $s \in \mathbb{R}$ otteniamo le soluzioni
$$\vec{y}(x) = e^{(x-2)A}\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = s\,(1 - e^{-(x-2)}, -1 + 2e^{-(x-2)}).$$

Notiamo che per il calcolo dell'esponenziale di matrice in questo caso possiamo anche procedere calcolando esplicitamente le potenze di A. Infatti si vede senza difficoltà che
$$A^k = \begin{cases} A & k \text{ dispari} \\ -A & k \text{ pari} \end{cases}$$
Allora, per ogni $z \in \mathbb{R}$,
$$e^{zA} = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k A^k}{k!} = \mathbf{1} - A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!} = \mathbf{1} - (e^{-z} - 1)A = \begin{pmatrix} 2 - e^{-z} & 1 - e^{-z} \\ -2 + 2e^{-z} & -1 + 2e^{-z} \end{pmatrix}.$$
Per $z = x - 2$ ritroviamo la (1.42).

Infine, osserviamo che la forma particolarmente semplice del sistema (1.41) permette una soluzione alternativa piú rapida. Se definiamo
$$z(x) = y_1(x) + y_2(x),$$
sommando le due righe del sistema (1.41) si ha $z'(x) = -z(x)$ e dunque $z(x) = z(2)e^{-(x-2)}$. Per determinare $y_1(x), y_2(x)$ osserviamo che la prima e la seconda riga del sistema implicano $y_1(x) = \int z(x)dx = -z(2)e^{-(x-2)} + C_1$ e $y_2(x) = -2\int z(x)dx = 2z(2)e^{-(x-2)} + C_2$. Sommando queste due equazioni troviamo $C_1 = -C_2 = 2y_1(2) + y_2(2)$, e quindi per $\vec{y}(2) = (y_1(2), y_2(2)) = (0, s)$ ritroviamo la soluzione $\vec{y}(x) = s\,(1 - e^{-(x-2)}, -1 + 2e^{-(x-2)})$ come sopra.

Esercizio 1.35. *Determinare la soluzione del sistema*
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) = -y_1(x) - y_2(x) \\ \vec{y}(0) = (0, 1) \end{cases} \tag{1.43}$$

Soluzione: È un sistema della forma $\vec{y}' = A\vec{y}$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $i, -i$ e gli autovettori associati sono $(-1-i, 1)$ e $(-1+i, 1)$ rispettivamente. Allora possiamo diagonalizzare A:

$$A = CDC^{-1}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}.$$

La soluzione è $\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{y}(0)$, e dunque

$$\vec{y}(x) = Ce^{xD}C^{-1}\vec{y}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}. \tag{1.44}$$

Ponendo $\vec{y}(0) = (0, 1)$ si ha

$$\vec{y}(x) = (2\sin(x), \cos(x) - \sin(x)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

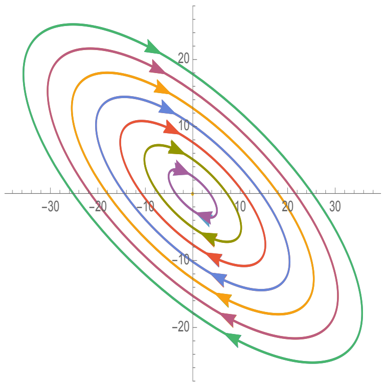

Figure 1.12: Grafico dei punti di coordinate $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$ dall'equazione (1.44), al variare di $x \in [-\pi, \pi]$ e corrispondenti ai diversi dati iniziali $(y_1(0), y_2(0)) = (k, -3k)$, per interi $k = 0, \dots, 7$. Le frecce sono nel verso delle x crescenti.

Esercizio 1.36. *Determinare la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione differenziale del terzo ordine*

$$y^{(3)}(x) + y(x) = 0. \tag{1.45}$$

Determinare tutte le soluzioni che soddisfano $y(0) = y'(0)$.

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 + 1 = 0$ che ha tre radici distinte (nel campo complesso)

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = e^{i\pi/3}, \quad \lambda_2 = e^{-i\pi/3}.$$

Allora abbiamo le tre soluzioni linearmente indipendenti a valori complessi $e^{\lambda_i x}$, $i = 1, 2, 3$. Per $i = 1$ poniamo $y_1(x) = e^{-x}$. Le due radici con parte immaginaria non nulla soddisfano $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Allora $e^{\lambda_2 x}$ e $e^{\lambda_3 x}$ sono complesse coniugate, e prendendone la parte reale e la parte immaginaria troviamo tre funzioni linearmente indipendenti a valori reali

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = \mathrm{Re}\left(e^{\frac{x}{2} + i\frac{x\sqrt{3}}{2}}\right) = e^{x/2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right), \quad y_3(x) = \mathrm{Im}\left(e^{\frac{x}{2} + i\frac{x\sqrt{3}}{2}}\right) = e^{x/2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

In conclusione la soluzione generale è

$$y(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{x/2} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \alpha_3 e^{x/2} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.46}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Notiamo che $y(0) = \alpha_1 + \alpha_2$, mentre $y'(0) = -\alpha_1 + \alpha_2/2 + \sqrt{3}\alpha_3/2$. Allora $y(0) = y'(0)$ significa che i tre parametri che prima erano liberi in $\mathbb{R}^3$ ora devono appartenere al piano di equazione

$$2\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha_3}{2} = 0.$$

In modo equivalente, esplicitando α_1 in funzione di α_2, α_3 possiamo dire che tutte le soluzioni tali che $y(0) = y'(0)$ sono descritte da

$$y(x) = \left(-\frac{\alpha}{4} + \frac{\sqrt{3}\beta}{4}\right) e^{-x} + \alpha e^{x/2} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta e^{x/2} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

dove $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sono due parametri.

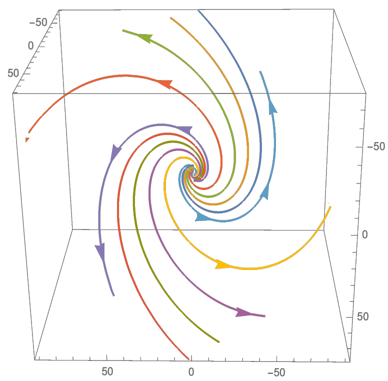

Figure 1.13: Grafico dei punti di coordinate $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, al variare di $x \in [0, 10]$, ricavati dall'equazione (1.50) e corrispondenti ai diversi dati iniziali $\vec{y}(0) = (t, 0, 0)$, per interi $t = -5, \ldots, 5$. Le frecce sono nel verso delle x crescenti.

Esercizio 1.37. *Determinare la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ y_3'(x) = -y_1(x) \end{cases} \tag{1.47}$$

in funzione della condizione iniziale $\vec{y}(0) = (t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Si può calcolare esplicitamente tramite la formula $\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{y}(0)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una soluzione equivalente si può ottenere osservando che con le sostituzioni $y(x) = y_1(x)$, $y'(x) = y_2(x)$, $y''(x) = y_3(x)$ il sistema è equivalente all'equazione differenziale del terzo ordine

$$y^{(3)}(x) + y(x) = 0,$$

che coincide con la (1.45). La soluzione generale è data dalla (1.46). Dunque la soluzione $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$ del sistema (1.47) si può scrivere

$$y_1(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{x/2} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \alpha_3 e^{x/2} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right), \tag{1.48}$$

$$y_2(x) = y_1'(x)\,, \qquad y_3(x) = y_1''(x). \tag{1.49}$$

Esprimendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in funzione di $\vec{y}(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0))$ si ottiene $\vec{y}(x)$ in funzione di $\vec{y}(0)$. Nel caso in cui $\vec{y}(0) = (t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, calcoli espliciti mostrano che

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{t}{3}\left(e^{-x} + 2e^{x/2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ y_2(x) &= \frac{t}{3}\left(-e^{-x} + e^{x/2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}\,e^{x/2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ y_2(x) &= \frac{t}{3}\left(e^{-x} - e^{x/2}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}\,e^{x/2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.50}$$

2 Massimi e minimi

Esercizio 2.1. *Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x,y) = xy - x - y$$

ristretta all'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :,\ x \in [0,2],\ y \in [0,2]\,,\ 1/2 \le xy \le 2\}$.

Soluzione: Poiché Γ è chiuso e limitato e f è continua su Γ, per il teorema di Weierstrass f deve assumere massimo e minimo assoluti su Γ. Consideriamo prima l'interno di Γ. Se un punto (x,y) interno a Γ è un massimo o minimo (relativo) allora deve essere un punto stazionario: $\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0$. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f, \partial_y f)(x,y) = (y-1, x-1),$$

e dunque $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $(x,y) = (1,1)$. L'hessiano $H_f(x,y)$ è dato dalla matrice

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori 1 e -1 e dunque $(1,1)$ è un punto di sella, e dunque all'interno di Γ non ci sono né massim i né minimi. Consideriamo la frontiera di Γ. Questa è composta da quattro componenti: $\partial\Gamma = \partial_1 \cup \partial_2 \cup \partial_3 \cup \partial_4$, dove ∂_1, ∂_2 sono segmenti di retta $x = 2$ e $y = 1$ compresi fra le due iperboli $y/x = 1/2$, $y/x = 2$, e ∂_3, ∂_4 sono i rami delle iperboli $y/x = 1/2$, $y/x = 2$ limitati dalle due rette $x = 2$ e $y = 1$. Su ∂_1 si ha $x = 2$, $y \in [1/4, 1]$ e la f vale $f(2,y) = 2y - 2 - y = y - 2$ che ha un minimo in $(2, 1/4)$ dove vale $-7/4$, e ha un massimo in $(2,1)$ dove vale -1. Su ∂_2 si ha $y = 2$, $x \in [1/4, 1]$ e la f vale $f(x,2) = 2x - 2 - x = x - 2$ che ha un minimo in $(1/4, 2)$ dove vale $-7/4$, e ha un massimo in $(1,2)$ dove vale -1.

Su ∂_3 si ha $xy = 2$, $x \in [1,2]$ e la f vale

$$f(x, 2/x) = 2 - x - 2/x\,, \quad x \in [1,2]$$

che ha un massimo in $x = \sqrt{2}$, $y = 2/x = \sqrt{2}$ dove vale $2 - 2\sqrt{2} > -1$. Il minimo su ∂_3 è raggiunto agli estremi $x = 1$ e $x = 2$ e vale -1 (come già sappiamo dallo studio di f su ∂_1 e ∂_2).

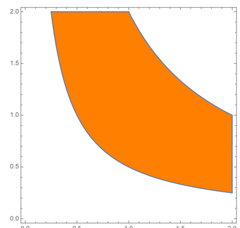

Figure 2.1: La regione $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :,\ x \in [0,2],\ y \in [0,2]\,,\ 1/2 \le xy \le 2\}$.

Su ∂_4 si ha $xy = 1/2$, $x \in [1/4, 2]$ e la f vale

$$f(x, 1/(2x)) = 1/2 - x - 1/(2x) \quad x \in [1/4, 2]$$

che ha un massimo in $x = \sqrt{2}/2$, $y = 1/(2x) = \sqrt{2}/2$ dove vale $1/2 - \sqrt{2} > -1$, ma $1/2 - \sqrt{2} < 2 - 2\sqrt{2}$, dunque il massimo raggiunto su ∂_3 è maggiore del massimo raggiunto su ∂_4. Il minimo su ∂_4 è raggiunto agli estremi $x = 1/4$ e $x = 2$ e vale $-7/4$ (come già sappiamo dallo studio di f su ∂_1 e ∂_2).

In conclusione, f su Γ raggiunge il minimo assoluto $-7/4$ nei due punti $(1/4, 2)$ e $(2, 1/4)$. Inoltre raggiunge il massimo assoluto $2 - 2\sqrt{2}$ nel punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Esercizio 2.2. *Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

ristretta all'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, \ x^4 + y^4 \leq 1\}$.

Soluzione: Poiché Γ è chiuso e limitato e f è continua su Γ, per il teorema di Weierstrass f deve assumere massimo e minimo assoluti su Γ. Consideriamo prima l'interno di Γ. Se un punto (x,y) interno a Γ è un massimo o minimo (relativo) allora deve essere un punto stazionario: $\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0$. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f, \partial_y f)(x,y) = (2x, 2y),$$

e dunque $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$.

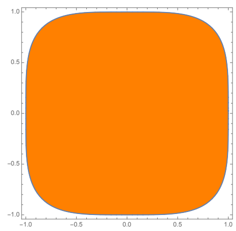

Figure 2.2: La regione $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, \ x^4 + y^4 \leq 1\}$.

L'hessiano $H_f(x,y)$ è dato dalla matrice

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori 2 e 2. Dunque $(0,0)$ è un punto di minimo relativo per f. Poiché $f(0,0) = 0$ e $f \geq 0$ vediamo che $(0,0)$ è punto di minimo assoluto. Allora il massimo di f su Γ deve essere raggiunto sulla frontiera $\partial\Gamma$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sappiamo che se $(x,y) \in \partial\Gamma$ è un massimo o un minimo di f ristretta a $\partial\Gamma$, allora nel punto (x,y) dobbiamo avere

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = \lambda \partial_x g(x,y) \\ \partial_y f(x,y) = \lambda \partial_y g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ da determinare e $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$. Calcolando i gradienti si ha

$$\begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 2y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Si tratta di 3 equazioni nelle tre incognite (x, y, λ). Troviamo le soluzioni:

$$(0, \pm 1, \tfrac{1}{2}), \quad (\pm 1, 0, \tfrac{1}{2}), \quad (\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

Ignorando il parametro λ abbiamo dunque trovato 8 punti sulla frontiera $\partial\Gamma$:

$$P_1 = (0,1), \ P_2 = (0,-1), \ P_3 = (1,0), \ P_4 = (-1,0),$$
$$P_5 = (2^{-1/4}, 2^{-1/4}), \ P_6 = (2^{-1/4}, -2^{-1/4}), \ P_7 = (-2^{-1/4}, 2^{-1/4}), \ P_8 = (-2^{-1/4}, -2^{-1/4}).$$

Notiamo che $f(P_i) = 1$ per ogni $i = 1, \dots, 4$, mentre $f(P_i) = \sqrt{2}$ per ogni $i = 5, \dots, 8$.

In conclusione f su Γ raggiunge il minimo assoluto 0 nel punto $(0, 0)$ e raggiunge il massimo assoluto $\sqrt{2}$ nei quattro punti $(\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4})$.

Esercizio 2.3. *Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

ristretta all'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :,\ x^4 + y^4 \leq 1\}$.

Soluzione: Poiché Γ è chiuso e limitato e f è continua su Γ, per il teorema di Weierstrass f deve assumere massimo e minimo assoluti su Γ. Consideriamo prima l'interno di Γ. Se un punto (x, y) interno a Γ è un massimo o minimo (relativo) allora deve essere un punto stazionario: $\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0$. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (\partial_x f, \partial_y f)(x, y) = -\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,(2x, 2y),$$

e dunque $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$. Notiamo che $f(0, 0) = 1$ e che $f(x, y) \in [0, 1]$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e dunque $(0, 0)$ è un punto di massimo assoluto per f. Allora il minimo di f su Γ deve essere raggiunto sulla frontiera $\partial\Gamma$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sappiamo che se $(x, y) \in \partial\Gamma$ è un massimo o un minimo di f ristretta a $\partial\Gamma$, allora nel punto (x, y) dobbiamo avere

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \lambda \partial_x g(x, y) \\ \partial_y f(x, y) = \lambda \partial_y g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ da determinare e $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$. Calcolando i gradienti si ha

$$\begin{cases} -\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} = 4\lambda x^3 \\ -\frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Si tratta di 3 equazioni nelle tre incognite (x, y, λ). Troviamo le soluzioni:

$$(0, \pm 1, -\tfrac{1}{8}), \quad (\pm 1, 0, -\tfrac{1}{8}), \quad (\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}).$$

Ignorando il parametro λ abbiamo dunque trovato 8 punti sulla frontiera $\partial\Gamma$:

$$P_1 = (0, 1), \ P_2 = (0, -1), \ P_3 = (1, 0), \ P_4 = (-1, 0),$$
$$P_5 = (2^{-1/4}, 2^{-1/4}), \ P_6 = (2^{-1/4}, -2^{-1/4}), \ P_7 = (-2^{-1/4}, 2^{-1/4}), \ P_8 = (-2^{-1/4}, -2^{-1/4}).$$

Notiamo che $f(P_i) = 1/2$ per ogni $i = 1, \dots, 4$, mentre $f(P_i) = 1/(1 + \sqrt{2}) < 1/2$ per ogni $i = 5, \dots, 8$.

In conclusione f su Γ raggiunge il massimo assoluto 1 nel punto $(0, 0)$ e raggiunge il minimo assoluto $1/(1 + \sqrt{2})$ nei quattro punti $(\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4})$.

Esercizio 2.4. *Consideriamo la funzione*

$$f(x, y) = x^4 - y^2 + 1$$

ristretta all'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :,\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$. *Dimostrare che i massimi e minimi sono tutti raggiunti sulla frontiera del dominio.*

Soluzione: Per il teorema di Weierstrass la funzione f ristretta a Γ assume sia massimi e minimi. Dimostriamo che non possono essere all'interno del dominio. Se un punto di massimo o di minimo si trova all'interno del dominio allora deve essere un punto stazionario. Poiché il gradiente vale $\nabla f(x, y) = (4x^3, -2y)$, l'unico punto stazionario di f è l'origine $(0, 0)$. Se calcoliamo l'hessiano di f in $(0, 0)$ otteniamo che è semi-definito negativo (ha autovalori 0 e -2). Dunque non si può concludere se $(0, 0)$ è massimo, minimo o sella dall'analisi dell'hessiano. Tuttavia possiamo osservare direttamente che $(0, 0)$ è punto di sella poiché vediamo che $f(0, 0) = 1$ ma $f(0, \epsilon) = 1 - \epsilon^2 < 1$ e $f(\epsilon, 0) = 1 + \epsilon > 1$, per ogni $\epsilon > 0$. L'unica possibilità che resta dunque è che massimi e minimi di f siano tutti raggiunti sulla frontiera. Notiamo che la stessa conclusione vale per qualsiasi dominio chiuso e limitato $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.5. *Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

ristretta all'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :, \ x^2 + y^2 \leq 25\}$.

Soluzione: Poiché Γ è chiuso e limitato e f è continua su Γ, per il teorema di Weierstrass f deve assumere massimo e minimo assoluti su Γ. Consideriamo prima l'interno di Γ. Se un punto (x, y) interno a Γ è un massimo o minimo (relativo) allora deve essere un punto stazionario: $\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0$. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (\partial_x f, \partial_y f)(x, y) = (3, 4),$$

e dunque $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ non è possibile. Pertanto f non ha punti stazionari. Allora il massimo e il minimo di f su Γ devono essere entrambi raggiunti sulla frontiera $\partial\Gamma$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sappiamo che se $(x, y) \in \partial\Gamma$ è un massimo o un minimo di f ristretta a $\partial\Gamma$, allora nel punto (x, y) dobbiamo avere

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \lambda \partial_x g(x, y) \\ \partial_y f(x, y) = \lambda \partial_y g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ da determinare e $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$. Calcolando i gradienti si ha

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 4 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Si tratta di 3 equazioni nelle tre incognite (x, y, λ). Troviamo le soluzioni:

$$(3, 4, \tfrac{1}{2}), \quad (-3, -4, -\tfrac{1}{2}).$$

Ignorando il parametro λ abbiamo dunque trovato 2 punti sulla frontiera $\partial\Gamma$:

$$P_1 = (3, 4), \ \ P_2 = (-3, -4).$$

Notiamo che $f(P_1) = 25$, mentre $f(P_2) = -25$. Ne segue che P_1 è il massimo e P_2 è il minimo di f su Γ.

Esercizio 2.6. *Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x, y) = (x - y)^2$$

ristretta all'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

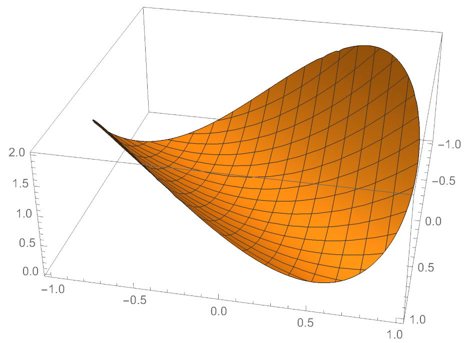

Figure 2.3: Grafico della funzione $(x-y)^2$ ristretta all'insieme $x^2+y^2 \leq 1$.

Soluzione: Poiché Γ è chiuso e limitato e f è continua su Γ, per il teorema di Weierstrass f deve assumere massimo e minimo assoluti su Γ. Consideriamo prima l'interno di Γ. Se un punto (x, y) interno a Γ è un massimo o minimo (relativo) allora deve essere un punto stazionario: $\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0$. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (\partial_x f, \partial_y f)(x, y) = (2(x-y), 2(y-x)),$$

e dunque $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ se e solo se $y = x$. Pertanto f ha punti stazionari lungo la retta $y = x$. Su questi punti f vale zero e poiché $f \geq 0$ sempre, abbiamo che tutti i punti $(x, y) \in \Gamma$ tali che $y = x$ sono punti di minimo assoluto per f ristretta a Γ.

Studiamo ora la f sulla frontiera $\partial\Gamma$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sappiamo che se $(x, y) \in \partial\Gamma$ è un massimo o un minimo di f ristretta a $\partial\Gamma$, allora nel punto (x, y) dobbiamo avere

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \lambda \partial_x g(x, y) \\ \partial_y f(x, y) = \lambda \partial_y g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ da determinare e $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Calcolando i gradienti si ha

$$\begin{cases} 2(x-y) = 2\lambda x \\ 2(y-x) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Si tratta di 3 equazioni nelle tre incognite (x, y, λ). Troviamo le soluzioni:

$$\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right), \quad \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right), \quad \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Ignorando il parametro λ abbiamo dunque trovato 4 punti sulla frontiera $\partial\Gamma$:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ P_3 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_4 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Notiamo che $f(P_1) = f(P_2) = 2$. Ne segue che P_1, P_2 sono due punti di massimo assoluto per f su Γ, mentre tutti i punti $(x, y) \in \Gamma$ con $x = y$, inclusi P_3 e P_4, sono punti di minimo assoluto.

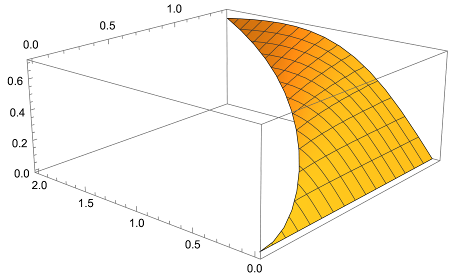

Figure 2.4: Grafico della funzione $f(x,y)$ dell'Esercizio 2.7 ristretta a $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, \ 0 \le x \le \sqrt{2}, \ 0 \le y \le x^2\}$. L'unico massimo di f su Γ è nel punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dove la f vale $\sqrt{2}/2$.

Esercizio 2.7. *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & se \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ristretta all'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, \ 0 \le x \le \sqrt{2}, \ 0 \le y \le x^2\}$. *Dire se la funzione è continua su* Γ *e determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di* f *ristretta a* Γ.

Soluzione: La funzione è evidentemente continua su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Verifichiamo che è continua anche nell'origine $(0,0)$. Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$|x^2 y| = x^2 |y| \le (x^2+y^2)|y| \le (x^2+y^2)^{3/2}.$$

Allora se $(x,y) \in \Gamma$ si ha $0 \le f(x,y) \le \sqrt{x^2+y^2}$, e dunque $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$. Dunque f è continua su tutto Γ. L'insieme Γ è chiuso e limitato e dunque f ha massimo e minimo assoluti su Γ per il teorema di Weierstrass. Verifichiamo che massimi e minimi si trovano tutti sulla frontiera $\partial\Gamma$. Infatti, osserviamo che f è di classe $\mathscr{C}^1$ nell'interno di Γ, che denotiamo con $\operatorname{Int}\Gamma = \Gamma \setminus \partial\Gamma$, e se $(x,y) \in \operatorname{Int}\Gamma$, si ha

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

In particolare, se (x,y) è un punto stazionario interno a Γ si deve avere $xy^3 = 0$, ma questo è impossibile poiché all'interno di Γ si ha $x > 0$ e $y > 0$. Allora massimi e minimi sono tutti sulla frontiera. Per determinare questi punti estremali possiamo osservare che la frontiera $\partial\Gamma$ è costituita dai tre segmenti $I_1 = \{0 \le x \le \sqrt{2}, \ y = 0\}$, $I_2 = \{0 \le x \le \sqrt{2}, \ y = x^2\}$, e $I_3 = \{x = \sqrt{2}, \ 0 \le y \le 2\}$. Calcolando la f lungo questi segmenti si vede che il segmento I_1 costituisce l'insieme dei minimi con $f = 0$ su I_1. Inoltre la f ristretta a I_2 vale

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \qquad 0 \le x \le \sqrt{2},$$

che ha un massimo in $x = \sqrt{2}$ dove la f vale $2/3$. Infine, la f ristretta a I_3 vale

$$h(y) = \frac{2y}{2+y^2}, \qquad 0 \le y \le 2.$$

Ponendo $h'(y) = 0$ e studiando il segno di $h''(y)$ troviamo che $h(y)$ ha un massimo in $y = \sqrt{2}$ dove la f vale $\sqrt{2}/2 > 2/3$. In conclusione il minimo di f è zero ed e' raggiunto su I_1 mentre l'unico massimo è nel punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dove f vale $\sqrt{2}/2$.

Esercizio 2.8. *Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

ristretta all'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : , \ (x-2)^2 + y^2 \le 1\}$. *Scrivere l'equazione del piano tangente a f nel punto di massimo.*

Soluzione: Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = -\frac{(x,y)}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

Notiamo che $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ per ogni $(x,y) \in \operatorname{Int}\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : , \ (x-2)^2+y^2 < 1\}$. Dunque non esistono punti di massimo o minimo all'interno di Γ. dunque per Weierstrass i massimi e minimi sono tutti sulla frontiera $\partial\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : , \ (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ (la funzione f è continua su Γ, che è chiuso e limitato). Su $\partial\Gamma$ possiamo parametrizzare $(x,y) = (2+\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $f(x,y) = h(\theta) = \sqrt{16 - (2+\cos(\theta))^2 - \sin(\theta)^2}$. Studiando questa funzione di $\theta \in [0,2\pi]$ troviamo che il massimo si ha in $\theta = \pi$ e il minimo in $\theta = 0$, dunque $(x_0,y_0) = (1,0)$ è il massimo con $f(1,0) = \sqrt{15}$ e $(x_0,y_0) = (3,0)$ è il minimo con $f(3,0) = \sqrt{7}$.

Il gradiente nel punto di massimo è $\nabla f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{15}}(1,0)$, e l'equazione del piano tangente a f nel punto di massimo è

$$z(x,y) = \sqrt{15} - \frac{(x-1)}{\sqrt{15}}, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2.9. *Al variare di $a \in [1,4]$, determinare i massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x,y) = (a - x^2 - y^2)^2$$

ristretta all'insieme $\Gamma = [-2,2]^2$.

Soluzione: Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = -4(ax - x^3 - xy^2, ay - x^2y - y^3) = -4(a - x^2 - y^2)(x,y).$$

La matrice hessiana vale

$$H_f(x,y) = -4\begin{pmatrix} a - 3x^2 - y^2 & -2xy \\ -2xy & a - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

Dunque i punti stazionari sono $(x,y) = (0,0)$ e tutte le coppie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $a - x^2 - y^2 = 0$, ossia tutta la circonferenza di raggio $\sqrt{a}$ con centro l'origine. Essendo $a \le 4$ questa è tutta contenuta nel quadrato Γ. Su questa circonferenza la f vale zero e dunque, essendo $f \ge 0$ ovunque, questi punti stazionari sono tutti minimi assoluti di f su Γ. Nell'origine H_f vale

$$H_f(0,0) = -4\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Essendo $a > 0$ la matrice $H_f(0,0)$ è definita negativa e abbiamo sempre un massimo locale stretto nell'origine, con $f(0,0) = a^2$. Per trovare eventuali massimi e minimi di f sulla frontiera $\partial\Gamma$ possiamo restringerci per simmetria a uno dei lati del quadrato, e calcolare per esempio $g(x) = f(x,2) = (4-a+x^2)^2$, $x \in [-2,2]$. Questa funzione g ha un minimo in $x = 0$ e due punti di massimo in $x = \pm 2$. Il massimo vale in entrambi i casi $g(\pm 2) = (8-a)^2$. Allora la f ha quattro punti di massimo sulla frontiera nei quattro vertici del quadrato $(x,y) = (\pm 2, \pm 2)$ dove vale $(8-a)^2$. Notiamo che se $a < 4$ allora $(8-a)^2 > a^2 = f(0,0)$, mentre se $a = 4$ si ha $(8-a)^2 - = a^2 = f(0,0) = 16$. In conclusione abbiamo mostrato che il minimo assoluto di f è unicamente raggiunto sulla circonferenza di raggio $\sqrt{a}$ con centro l'origine dove f vale zero. Inoltre se $a < 4$ il massimo assoluto è unicamente raggiunto nei vertici $(x,y) = (\pm 2, \pm 2)$ dove vale $(8-a)^2$, mentre se $a = 4$ il massimo assoluto è unicamente raggiunto nei vertici $(x,y) = (\pm 2, \pm 2)$ e nell'origine.

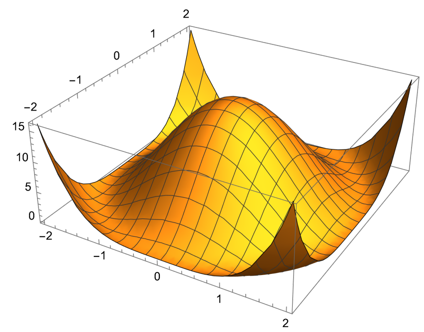

Figure 2.5: Grafico della funzione $(a - x^2 - y^2)^2$ dell'esercizio 2.9 per $a = 4$.

3 Integrali doppi

Esercizio 3.1. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int_\Omega \frac{|x|\, y}{\sqrt{2 - x^2}}\, dxdy, \tag{3.1}$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 4\,,\ \ y \geq 1\}$.

Soluzione: L'insieme Ω è la parte superiore di un'ellisse centrata in $(0, 1)$ come in Figura 3.1, e può essere descritto come dominio semplice:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq y \leq 1 + \sqrt{4 - 2x^2}\,,\ |x| \leq \sqrt{2}\}.$$

Allora

$$\int\int_\Omega \frac{|x|\, y}{\sqrt{2 - x^2}} dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_1^{1+\sqrt{4-2x^2}} ydy \right) \frac{|x|}{\sqrt{2 - x^2}} dx.$$

L'integrale interno vale

$$\int_1^{1+\sqrt{4-2x^2}} ydy = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4 - 2x^2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Notiamo che

$$\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{|x|}{\sqrt{2 - x^2}} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} dx = -\int_0^{\sqrt{2}} \frac{d}{dx}\sqrt{2 - x^2}\, dx = \sqrt{2}.$$

Inoltre,

$$\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{4 - 2x^2}\right)^2 \frac{|x|}{\sqrt{2 - x^2}} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{4 - 2x^2}\right)^2 \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} dx$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{d}{dx}\left(1 + \sqrt{4 - 2x^2}\right)^3 dx = 26\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$$

In conclusione,

$$\int\int_\Omega \frac{|x|\, y}{\sqrt{2 - x^2}} dxdy = \frac{13\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

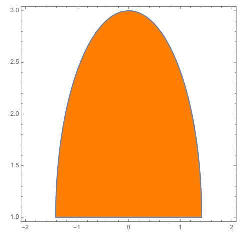

Figure 3.1: La regione $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 4\,,\ y \geq 1\}$.

Esercizio 3.2. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int_\Omega xy\,dxdy, \tag{3.2}$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\,,\ y \geq 2-x\}$.

Soluzione: Osserviamo che Ω è il semicerchio di raggio 1 centrato in $(1,1)$ e delimitato dal basso dalla retta $y = 2-x$ passante per il centro. Passando a coordinate polari di centro $(1,1)$ si ha

$$\begin{gathered}(x,y) = \psi(\varrho,\theta) = (1+\varrho\cos(\theta), 1+\varrho\sin(\theta))\,, \quad \det J_\psi = \varrho, \\ \Omega = \psi(S)\,, \quad S = \{(\varrho,\theta) : \ \varrho \in [0,1],\ \theta \in [-\pi/4, 3\pi/4]\}\,.\end{gathered}$$

Allora,

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega xy\,dxdy &= \int_S (1+\varrho\cos(\theta))(1+\varrho\sin(\theta))\,\varrho\,d\varrho\,d\theta \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (1+\varrho\cos(\theta))(1+\varrho\sin(\theta))d\theta\right)\varrho\,d\varrho \\ &= \int_0^1 (\pi + 2\sqrt{2}\,\varrho)\,\varrho\,d\varrho = \frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

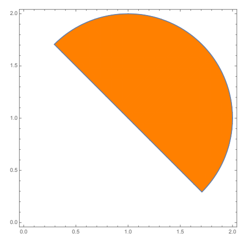

Figure 3.2: Grafico della regione $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\,,\ y \geq 2-x\}$.

Esercizio 3.3. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int_\Omega |xy|\,dxdy, \tag{3.3}$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|^3 \leq |y| \leq x^2\,,\ x \in [-1,1]\}$.

Soluzione: Notiamo che per $x \in [-1,1]$ si ha $|x|^3 \le x^2$ e scriviamo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ dove

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|^3 \le y \le x^2 \,,\ x \in [-1,1]\}\,, \quad \Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -x^2 \le y \le -|x|^3 \,,\ x \in [-1,1]\}.$$

Dunque

$$\int\int_\Omega |xy|\, dxdy = \int\int_{\Omega_1} |xy|\, dxdy + \int\int_{\Omega_2} |xy|\, dxdy.$$

I domini Ω_1, Ω_2 sono domini semplici e possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\int\int_{\Omega_1} |xy|\, dxdy &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{|x|^3}^{x^2} y dy \right) |x| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (x^4 - x^6)|x| dx = \int_0^1 (x^5 - x^7) dx = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Per simmetria abbiamo $\int\int_{\Omega_1} |xy|\, dxdy = \int\int_{\Omega_2} |xy|\, dxdy$ e dunque

$$\int\int_\Omega |xy|\, dxdy = \frac{1}{12}. \tag{3.4}$$

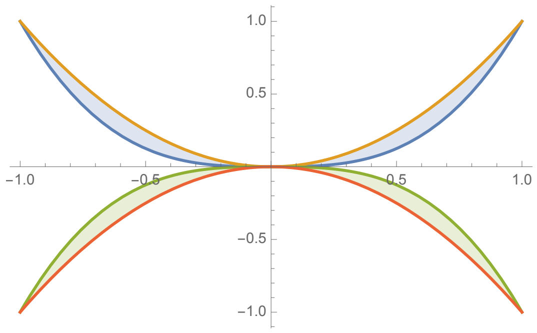

Figure 3.3: La regione $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|^3 \le |y| \le x^2 \,,\ x \in [-1,1]\}$ è l'unione delle quattro regioni ottenute come sopra tra le curve $x^3, -x^3, x^2, -x^2$, per $x \in [-1,1]$.

Esercizio 3.4. *Calcolare gli integrali*

$$I_1 = \int\int_\Omega |x| \cos(y)\, dxdy, \qquad I_2 = \int\int_{\widetilde{\Omega}} x \cos(y)\, dxdy \tag{3.5}$$

dove

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ |y| \le x^2 \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \le |x| \le \frac{\pi}{2},\ |y| \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\widetilde{\Omega} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \frac{x^2}{2} \le |y| \le x^2 \right\}.$$

Soluzione: Scriviamo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ dove Ω_i sono domini semplici, con

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ |y| \le x^2 \right\}, \qquad \Omega_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \le |x| \le \frac{\pi}{2},\ |y| \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Calcoliamo

$$I_1 = \int\int_{\Omega_1} |x|\cos(y)\,dxdy = \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_{-x^2}^{x^2} \cos(y)dy\right)|x|dx$$
$$= \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2\sin(x^2)|x|dx = 2\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2\sin(x^2)xdx = 2.$$

Inoltre,

$$\int\int_{\Omega_2} |x|\cos(y)\,dxdy = 2\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)dy\right)xdx$$
$$= 4\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} xdx = \frac{\pi^2}{2} - \pi.$$

In conclusione,

$$I_1 = \int\int_{\Omega} |x|\cos(y)\,dxdy = \int\int_{\Omega_1} |x|\cos(y)\,dxdy + \int\int_{\Omega_2} |x|\cos(y)\,dxdy = 2 + \frac{\pi^2}{2} - \pi.$$

Per il calcolo di I_2 abbiamo

$$I_2 = \int\int_{\widetilde{\Omega}} |x|\cos(y)\,dxdy = 2\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \cos(y)dy\right)xdx$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2)xdx - 2\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2/2))xdx = \sqrt{2} - 1.$$

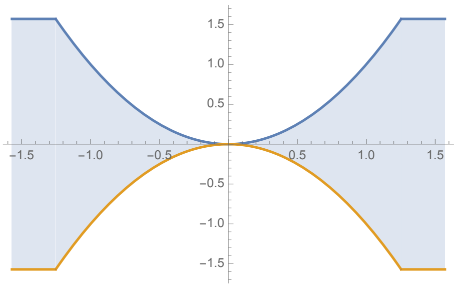

Figure 3.4: La regione Ω dell'esercizio 3.4 .

Esercizio 3.5. *Calcolare gli integrali*

$$I_1 = \int\int_{\Omega} (x^2 + y^2)\,dxdy, \qquad I_2 = \int\int_{\Omega} (x^2 - 2x - y^2)\,dxdy \tag{3.6}$$

dove $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 9\right\} \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}.$

Soluzione: Calcoliamo I_1. Il dominio è il disco di raggio 3 centrato nell'origine, che chiamiamo Ω_1, privato del disco di raggio 1 centrato in $(1, 1)$, che chiamiamo Ω_2. Considerazioni semplici mostrano che $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Dunque scriviamo

$$\int\int_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int\int_{\Omega_1} (x^2 + y^2)\, dxdy - \int\int_{\Omega_2} (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Per il calcolo di Ω_1, passando a coordinate polari $(x, y) = \psi(\varrho, \theta) = (\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta))$, $\det J_\psi = \varrho$ si ha

$$\int\int_{\Omega_1} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \varrho^3\, d\varrho = 2\pi \int_0^3 \varrho^3\, d\varrho = \frac{81\pi}{2}.$$

Per l'altro integrale, usiamo coordinate polari di centro $(1, 1)$:

$$(x, y) = \psi(\varrho, \theta) = (1 + \varrho\cos(\theta), 1 + \varrho\sin(\theta))\,, \quad \det J_\psi = \varrho,$$
$$\Omega_2 = \psi(S)\,, \quad S = \{(\varrho, \theta) :\ \varrho \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi]\}\,.$$

In queste coordinate si ha $x^2 + y^2 = 2 + \varrho^2 + 2\varrho\cos(\theta) + 2\varrho\sin(\theta)$. Allora,

$$\begin{aligned}\int\int_{\Omega_2} (x^2 + y^2)\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2 + \varrho^2 + 2\varrho\cos(\theta) + 2\varrho\sin(\theta))d\theta\right) \varrho\, d\varrho \\ &= \int_0^1 \left((2 + \varrho^2)2\pi)\right) \varrho\, d\varrho = \frac{5\pi}{2}.\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$I_1 = \int\int_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dxdy = \frac{81\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} = 38\pi.$$

Per il calcolo di I_2 si procede come sopra. Il primo integrale viene

$$\int\int_{\Omega_1} (x^2 - 2x - y^2)\, dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} (\varrho^2\cos^2(\theta) - \varrho\cos(\theta) - \varrho^2\sin^2(\theta))d\theta\right) \varrho\, d\varrho = 0.$$

Il secondo integrale si calcola come sopra, e osservando che $x^2 - 2x - y^2 = (x - 1)^2 - (y - 1)^2 - 2y$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int\int_{\Omega_2} (x^2 - 2x - y^2)\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (\varrho^2\cos^2(\theta) - \varrho^2\sin^2(\theta) - 2 - 2\varrho\sin(\theta))d\theta\right) \varrho\, d\varrho \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (-2)d\theta\right) \varrho\, d\varrho = -2\pi.\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$I_2 = \int\int_{\Omega} (x^2 - 2x - y^2)\, dxdy = 2\pi.$$

Esercizio 3.6. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int_{\Omega} (x + y)\, dxdy, \tag{3.7}$$

dove $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |y| \leq 3x,\ x \in [0, 4]\right\} \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

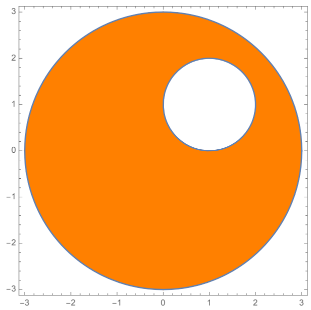

Figure 3.5: La regione Ω dell'esercizio 3.5 .

Soluzione: Il dominio è il triangolo $\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \le 3x, \ x \in [0,4]\right\}$, privato del disco di raggio 1 centrato in $(2,0)$, che chiamiamo Ω_2. Notiamo che $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Infatti se $(x,y) \in \Omega_2$, allora $x \in [1,3]$ e y soddisfa $y^2 \le 1-(x-2)^2 \le 9x^2$, da cui $|y| \le 3x$. Dunque scriviamo

$$\int\int_{\Omega} (x+y)\,dxdy = \int\int_{\Omega_1} (x+y)\,dxdy - \int\int_{\Omega_2} (x+y)\,dxdy.$$

Per il calcolo di Ω_1, abbiamo

$$\int\int_{\Omega_1} (x+y)\,dxdy = \int_0^4 \left(\int_{-3x}^{3x} (x+y)\,dy\right) dx = \int_0^4 6x^2\,dx = 128.$$

Per Ω_2 abbiamo

$$\int\int_{\Omega_2} (x+y)\,dxdy = \int_1^3 \left(\int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} (x+y)\,dy\right) dx = \int_1^3 2x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx = 2\pi,$$

dove per l'ultimo integrale abbiamo usato

$$\int_1^3 2x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx = \int_{-1}^1 2(s+2)\sqrt{1-s^2}\,ds = 4\int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2}\,ds = 4\arcsin(1) = 2\pi.$$

Per l'integrale su Ω_2 si potevano anche usare le coordinate polari di centro $(2,0)$:

$$\int\int_{\Omega_2} (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2+\varrho\cos(\theta)+\varrho\sin(\theta))\,d\theta\right) \varrho\,d\varrho = 4\pi\int_0^1 \varrho\,d\varrho = 2\pi.$$

In conclusione,

$$\int\int_{\Omega} (x+y)\,dxdy = 128 - 2\pi.$$

Esercizio 3.7. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int_{\Omega} \frac{x}{1+y}\,dxdy, \tag{3.8}$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ y \ge 1-x, \ x^2+y^2 \le 1\right\}$.

Soluzione: Possiamo scrivere $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, con Ω_1 il quadrante positivo del disco di raggio 1 e $\Omega_2 \subset \Omega_1$ il triangolo rettangolo con vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$. In questo modo si ha

$$\int\int_{\Omega} \frac{x}{1+y}\, dxdy = \int\int_{\Omega_1} \frac{x}{1+y}\, dxdy - \int\int_{\Omega_2} \frac{x}{1+y}\, dxdy.$$

Usiamo coordinate polari di centro $(0,0)$ per calcolare il primo integrale:

$$\begin{aligned} (x,y) = \psi(\varrho,\theta) = (\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta))\,, \quad \det J_\psi = \varrho, \\ \Omega_1 = \psi(S)\,, \quad S = \{(\varrho,\theta):\ \varrho \in [0,1],\ \theta \in [0,\pi/2]\}\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\int\int_{\Omega_1} \frac{x}{1+y}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\varrho\cos(\theta)}{1+\varrho\sin(\theta)}\, d\theta\right) \varrho\, d\varrho = \int_0^1 \log(1+\varrho)\, \varrho\, d\varrho.$$

L'ultimo integrale vale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1+\varrho)\, \varrho\, d\varrho &= \int_1^2 (s-1)\log(s) ds = \int_1^2 s\log(s) ds - \int_1^2 \log(s) ds \\ &= 2\log(2) - \frac{3}{4} - (2\log(2) - 1) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le integrazioni per parti:

$$\int s\log(s) ds = \frac{1}{2}s^2\log(s) - \frac{1}{4}s^2\,, \qquad \int \log(s) ds = s\log(s) - s.$$

Il secondo integrale vale

$$\int\int_{\Omega_2} \frac{x}{1+y}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{1}{1+y}\, dy\right) x dx = \int_0^1 \log(2-x) x dx.$$

Usando di nuovo l'integrazione per parti come sopra, l'ultimo integrale vale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(2-x)\, x dx &= \int_1^2 (2-s)\log(s) ds = 2\int_1^2 \log(s) ds - \int_1^2 s\log(s) ds \\ &= 4\log(2) - 2 - \left(2\log(2) - \frac{3}{4}\right) = 2\log(2) - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int\int_{\Omega} \frac{x}{1+y}\, dxdy = \frac{1}{4} - \left(2\log(2) - \frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2} - 2\log(2).$$

Esercizio 3.8. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int_{\Omega} e^{-(x^2-2x+y^2-2y)}\, dxdy, \tag{3.9}$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ -1 \le x^2 - 2x + y^2 - 2y \le 0\right\}$.

Soluzione: Osserviamo che Ω è la corona circolare

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2\}$$

di centro $(1,1)$ e raggi 1 e $\sqrt{2}$. Passando a coordinate polari di centro $(1,1)$ si ha

$$(x,y) = \psi(\varrho,\theta) = (1+\varrho\cos(\theta), 1+\varrho\sin(\theta)), \quad \det J_\psi = \varrho,$$
$$\Omega = \psi(S), \quad S = \{(\varrho,\theta) : \ \varrho \in [1, \sqrt{2}], \ \theta \in [0,2\pi]\}.$$

Inoltre $e^{-(x^2-2x+y^2-2y)} = e^{-\varrho^2+2}$, dunque

$$\int\int_\Omega e^{-(x^2-2x+y^2-2y)}\,dxdy = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \varrho e^{-\varrho^2+2}\,d\varrho = \pi e^2(e^{-1} - e^{-2}) = \pi(e-1).$$

Esercizio 3.9. *Calcolare l'area della regione*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2\,, \ x \ge 0\,, \ y \ge 0\}. \tag{3.10}$$

Soluzione: Notiamo che Ω è la porzione contenuta nel quadrante positivo $x \ge 0, y \ge 0$, della corona circolare di centro $(1,1)$ e raggi 1 e $\sqrt{2}$. L'area della corona è $2\pi - \pi = \pi$. Per calcolare l'area della parte di corona fuori dal quadrante positivo possiamo ragionare in termini puramente geometrici. Consideriamo il quadrato Q di lato 2 di centro $(1,1)$ e notiamo che è inscritto nella circonferenza $\mathscr{C}_{\sqrt{2}}$ di raggio $\sqrt{2}$ e centro $(1,1)$ e tangente alla circonferenza $\mathscr{C}_1$ di centro $(1,1)$ e raggio 1, vedere Figura 3.6. Allora $\text{Area}(\mathscr{C}_{\sqrt{2}}) - \text{Area}(Q) = 2\pi - 4$ e

$$\text{Area}(\Omega) = \text{Area}(\mathscr{C}_{\sqrt{2}}) - \text{Area}(\mathscr{C}_1) - \frac{1}{2}(\text{Area}(\mathscr{C}_{\sqrt{2}}) - \text{Area}(Q)) = 2.$$

Alternativamente si poteva calcolare l'area del segmento circolare $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], 2 \le y \le 1 + \sqrt{2-(x-1)^2}\}$ con l'integrale:

$$\text{Area}(\Omega_1) = \int_0^2 \left(\int_2^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} dy \right) dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2-(x-1)^2} - 1 \right) dx = \frac{1}{2}(\pi - 2),$$

e notare che

$$\text{Area}(\Omega) = \text{Area}(\mathscr{C}_{\sqrt{2}}) - \text{Area}(\mathscr{C}_1) - 2\text{Area}(\Omega_1) = 2\pi - \pi - 2(\tfrac{1}{2}(\pi-2)) = 2.$$

Notiamo che il calcolo di $\text{Area}(\Omega_1)$ si poteva effettuare anche passando a coordinate polari di centro $(1,1)$:

$$\text{Area}(\Omega_1) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{1/\sin(\theta)}^{\sqrt{2}} \varrho\,d\varrho \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(2 - \sin^{-2}(\theta) \right) d\theta = \frac{1}{2}(\pi - 2).$$

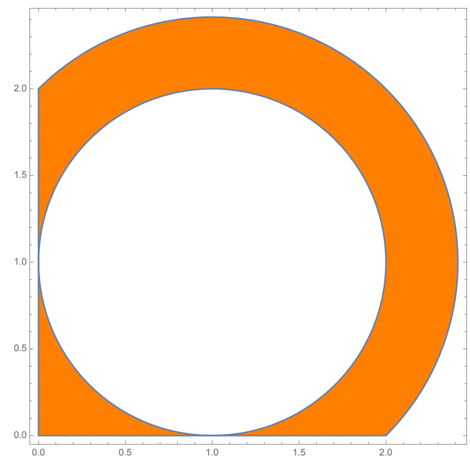

Figure 3.6: La regione Ω dell'esercizio 3.9 .

4 Integrali tripli

Esercizio 4.1. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int\int_{\Omega} z^2\,dxdydz, \tag{4.1}$$

dove $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x^2 + y^2)^3 \leq z^2 \leq 1\right\}$.

Soluzione: Il dominio si può scrivere come $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ con

$$\Omega_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x^2 + y^2)^{3/2} \leq z \leq 1\right\}, \quad \Omega_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \leq z \leq -(x^2 + y^2)^{3/2}\right\}.$$

Per simmetria si ha

$$\int\int\int_{\Omega} z^2\,dxdydz = 2\int\int\int_{\Omega_1} z^2\,dxdydz.$$

Per il calcolo possiamo usare coordinate cilindriche:

$$(x, y, z) = \psi(\varrho, \theta, z) = (\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta), z), \qquad \det J_\psi = \varrho.$$

Si ha $\Omega_1 = \psi(S)$ dove $S = \{(\varrho, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varrho \leq 1,\ \varrho^3 \leq z \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}\int\int\int_{\Omega_1} z^2\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{\varrho^3}^1 z^2\,dz\right)\varrho\,d\varrho\right)d\theta \\ &= \frac{2}{3}\pi\int_0^1 (1 - \varrho^9)\varrho\,d\varrho = \frac{3\pi}{11}.\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\int\int\int_{\Omega} z^2\,dxdydz = \frac{6\pi}{11}.$$

Esercizio 4.2. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int\int_{\Omega} |y|\,dxdydz, \tag{4.2}$$

dove $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq y^2 \leq 1\right\}$.

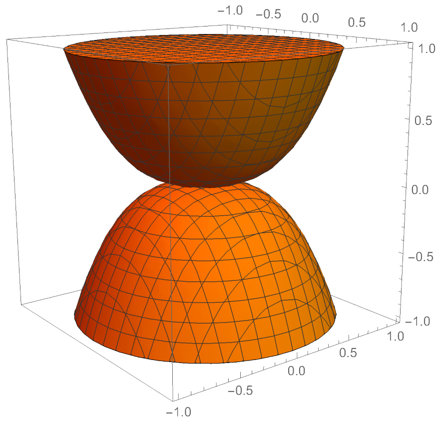

Figure 4.1: La regione $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x^2 + y^2)^3 \le z^2 \le 1\right\}$ dell'esercizio 4.1 .

Soluzione: Ragionando come in Esercizio 4.1 si ha

$$\int\int\int_{\Omega} |y|\, dxdydz = \frac{\pi}{2}. \tag{4.3}$$

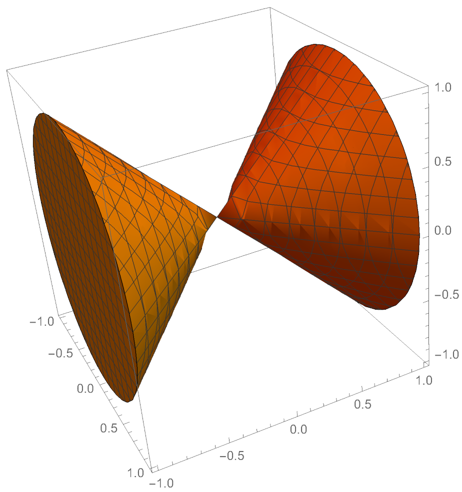

Figure 4.2: La regione $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 \le y^2 \le 1\right\}$ dell'esercizio 4.2 .

Esercizio 4.3. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int\int_{\Omega} (3x + 9y)\, dxdydz, \tag{4.4}$$

dove Ω *è il tetraedro delimitato dai piani* $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$, $\{x + y + z = 1\}$.

Soluzione: Osserviamo che per simmetria si ha $\int\int\int_{\Omega} x\, dxdydz = \int\int\int_{\Omega} y\, dxdydz = \int\int\int_{\Omega} z\, dxdydz$ e dunque

$$\int\int\int_{\Omega} (3x + 9y)\, dxdydz = 12 \int\int\int_{\Omega} z\, dxdydz.$$

Per calcolare $\int\int\int_\Omega z\,dxdydz$ osserviamo che Ω è un dominio semplice:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in [0,1]^3 : \ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-(x+y)\right\}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Omega z\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} z\,dz\right)dy\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3dx = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int\int\int_\Omega (3x+9y)\,dxdydz = \frac{1}{2}.$$

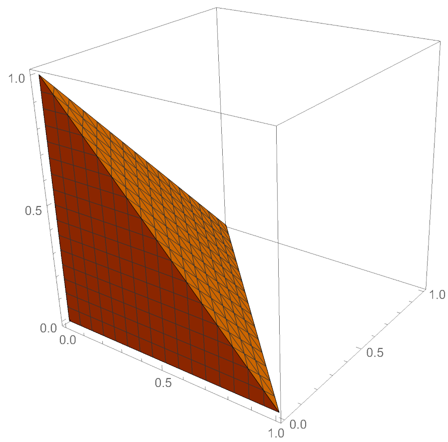

Figure 4.3: La regione Ω dell'esercizio 4.3 .

Esercizio 4.4. *Calcolare il volume della regione*

$$\Omega = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 : \ z \ge 1-x-y\} \tag{4.5}$$

Soluzione: Osserviamo che gli estremi di integrazione si possono scrivere come $1 \ge x \ge 0, 1 \ge y \ge 0$ e $1 \ge z \ge \max\{0, 1-x-y\}$. Dunque se $y \in [0, 1-x]$ allora $z \in [1-x-y, 1]$ mentre se $y \in [1-x, 1]$ allora $z \in [0,1]$. Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\Omega) &= \int\int\int_\Omega dxdydz \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_{1-x-y}^1 dz\right)dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{1-x}^1\left(\int_0^1 dz\right)dy\right)dx \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x+y)dy\right)dx + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

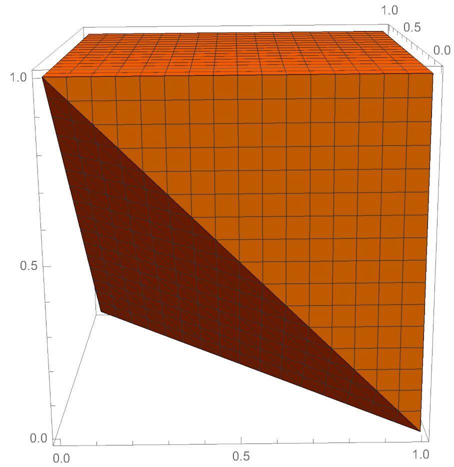

Figure 4.4: La regione Ω dell'esercizio 4.4 .

Esercizio 4.5. *Calcolare il volume della regione*

$$\Omega = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 : \; 1 \leq x+y+z \leq 2\} \tag{4.6}$$

Soluzione: Ragionando come in Esercizio 4.4 si ottiene $\mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{2}{3}$.

Esercizio 4.6. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int\int_\Omega (x+z)\, dxdydz, \tag{4.7}$$

dove $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$*, con* Ω_1 *la palla di raggio 1 con centro* $(1,0,0)$ *e* $\Omega_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \geq 1\}$.

Soluzione: Per simmetria si deve avere $\int\int\int_\Omega z\, dxdydz = 0$, dunque

$$\int\int\int_\Omega (x+z)\, dxdydz = \int\int\int_\Omega x\, dxdydz.$$

Passiamo a coordinate sferiche di centro $(1,0,0)$:

$$(x,y,z) = \psi(\varrho,\varphi,\theta) = (1+\varrho\cos(\varphi)\sin(\theta), \varrho\sin(\varphi)\sin(\theta), \varrho\cos(\theta)), \qquad \det J_\psi = \varrho^2\sin(\theta).$$

Si ha $\Omega = \psi(S)$ dove $S = \{(\varrho,\varphi,\theta) : 0 \leq \varrho \leq 1, \; -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\,, \; 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Allora

$$\begin{aligned}
\int\int\int_\Omega x\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\varrho\cos(\varphi)\sin(\theta))\, d\varphi \right) \sin(\theta) d\theta \right) \varrho^2 d\varrho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi (\pi + 2\varrho\sin(\theta))\sin(\theta) d\theta \right) \varrho^2 d\varrho \\
&= 2\pi \int_0^1 \varrho^2 d\varrho + 2\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Notiamo che il calcolo dell'integrale rispetto a θ diventa piú semplice se si usano coordinate sferiche con asse verticale dato dalla x in luogo della z. Infatti in questo caso poniamo:

$$(x,y,z) = \psi(\varrho,\varphi,\theta) = (1+\varrho\cos(\theta), \varrho\cos(\varphi)\sin(\theta), \varrho\sin(\varphi)\sin(\theta)), \qquad \det J_\psi = \varrho^2\sin(\theta),$$

con $\Omega = \psi(S)$ dove $S = \{(\varrho, \varphi, \theta) : 0 \le \varrho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$. Dunque

$$\begin{aligned}\int\int\int_{\Omega} x\,dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}(1+\varrho\cos(\theta))\sin(\theta)\,d\theta\right)d\varphi\right)\varrho^2 d\varrho \\ &= 2\pi\int_0^1 (1+\varrho/2)\varrho^2 d\varrho = \frac{11\pi}{12}.\end{aligned}$$

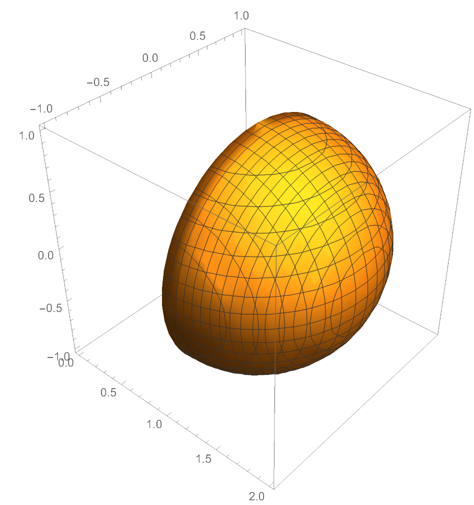

Figure 4.5: La regione Ω dell'esercizio 4.6 .

Esercizio 4.7. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int\int_{\Omega} z^2\,dxdydz, \tag{4.8}$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\,,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

Soluzione: Osserviamo che Ω consiste della semisfera di raggio 1 con centro l'origine e $z \ge 0$, privata del cono $\{z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$, si veda Figura 4.6. Possiamo usare coordinate sferiche:

$$(x, y, z) = \psi(\varrho, \varphi, \theta) = (\varrho\cos(\varphi)\sin(\theta), \varrho\sin(\varphi)\sin(\theta), \varrho\cos(\theta)), \qquad \det J_{\psi} = \varrho^2\sin(\theta).$$

Si ha $\Omega = \psi(S)$ dove $S = \{(\varrho, \varphi, \theta) : 0 \le \varrho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ \pi/4 \le \theta \le \pi/2\}$. Allora

$$\begin{aligned}\int\int\int_{\Omega} z^2\,dxdydz &= \int_0^1\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}(\varrho\cos(\theta))^2\,d\varphi\right)\sin(\theta)d\theta\right)\varrho^2 d\varrho \\ &= 2\pi\int_0^1\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta\right)\varrho^4 d\varrho \\ &= \frac{2\pi}{3}\,2^{-3/2}\int_0^1 \varrho^4 d\varrho = \frac{\pi}{15\sqrt{2}}\end{aligned}$$

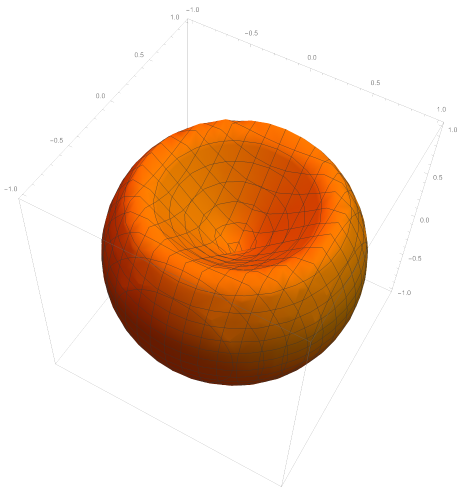

Figure 4.6: La regione Ω dell'esercizio 4.7 .

Esercizio 4.8. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int\int_{\Omega} |z|\, dxdydz, \tag{4.9}$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ |z| \leq \sqrt{3}\}$.

Soluzione: Ω consiste della palla di raggio 2 con centro l'origine, che chiamiamo Ω_1, privata del cilindro di raggio 1 lungo l'asse z e centro l'origine troncato a $z = \pm\sqrt{3}$, che chiamiamo Ω_2. Poiché il cilindro interseca il bordo della palla ad altezza $z = \pm\sqrt{3}$, si ha $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Allora

$$\int\int_{\Omega} |z|\, dxdydz = \int\int_{\Omega_1} |z|\, dxdydz - \int\int_{\Omega_2} |z|\, dxdydz.$$

Il primo integrale si può calcolare in coordinate sferiche:

$$(x, y, z) = \psi(\varrho, \varphi, \theta) = (\varrho\cos(\varphi)\sin(\theta), \varrho\sin(\varphi)\sin(\theta), \varrho\cos(\theta)), \qquad \det J_\psi = \varrho^2\sin(\theta).$$

Si ha $\Omega_1 = \psi(S)$ dove $S = \{(\varrho, \varphi, \theta) : 0 \leq \varrho \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Allora

$$\begin{aligned}
\int\int_{\Omega_1} |z|\, dxdydz &= \int_0^2 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \varrho|\cos(\theta)|\sin(\theta)d\theta\right)\varrho^2 d\varrho \\
&= 2\pi\int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta\right)\varrho^3 d\varrho \\
&= 2\pi\int_0^2 \varrho^3 d\varrho = 8\pi.
\end{aligned}$$

Il secondo integrale si può calcolare in coordinate cilindriche:

$$(x, y, z) = \psi(\varrho, \theta, z) = (\varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta), z), \qquad \det J_\psi = \varrho.$$

Si ha $\Omega_2 = \psi(S)$ dove $S = \{(\varrho, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varrho \leq 1,\ |z| \leq \sqrt{3}\}$. Dunque

$$\int\int\int_{\Omega_2} |z|\, dxdydz = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{3}} zdz\right)\varrho\, d\varrho\right) d\theta = 3\pi.$$

In conclusione,

$$\int\int_{\Omega} |z|\, dxdydz = 8\pi - 3\pi = 5\pi.$$

Esercizio 4.9. *Calcolare l'integrale*

$$\int\int\int_{\Omega} |x|e^{-x^2}\, dxdydz, \tag{4.10}$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in [-1, 1]^3 : \ y^2 + z^2 \geq 1\}$.

Soluzione: Possiamo scrivere $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ dove Ω_1 è il cubo $\Omega_1 = \{(x, y, z) \in [-1, 1]^3\}$ e Ω_2 è il cilindro lungo l'asse x dato da $\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 < 1\,,\ |x| \leq 1\}$. Notiamo che $\Omega_2 \subset \Omega_1$ e dunque

$$\int\int_{\Omega} |x|e^{-x^2}\, dxdydz = \int\int_{\Omega_1} |x|e^{-x^2}\, dxdydz - \int\int_{\Omega_2} |x|e^{-x^2}\, dxdydz.$$

Il primo integrale vale

$$\int\int_{\Omega_1} |x|e^{-x^2}\, dxdydz = 4\int_{-1}^{1} |x|e^{-x^2} dx = 8\int_{0}^{1} xe^{-x^2} dx = 4(1 - e^{-1}).$$

Il secondo integrale si si può calcolare in coordinate cilindriche lungo l'asse x:

$$(x, y, z) = \psi(\varrho, \theta, z) = (x, \varrho\cos(\theta), \varrho\sin(\theta)), \qquad \det J_{\psi} = \varrho.$$

Si ha $\Omega_2 = \psi(S)$ dove $S = \{(\varrho, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varrho \leq 1,\ |x| \leq 1\}$. Allora

$$\int\int\int_{\Omega_2} |x|e^{-x^2}\, dxdydz = \int_{0}^{2\pi} \left(\int_{0}^{1} \left(\int_{-1}^{1} |x|e^{-x^2} dx\right) \varrho\, d\varrho\right) d\theta = \pi(1 - e^{-1}).$$

In conclusione,

$$\int\int_{\Omega} |x|e^{-x^2}\, dxdydz = (4 - \pi)\,(1 - e^{-1}).$$

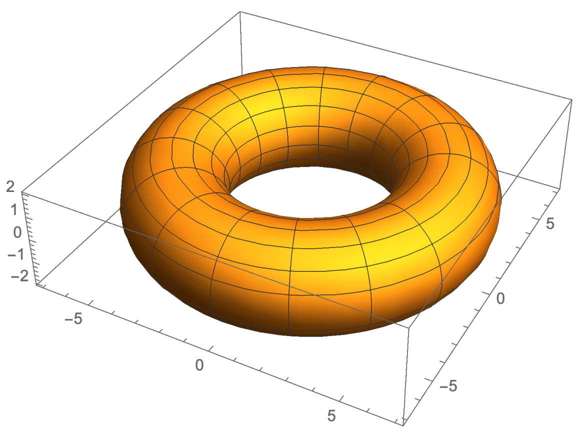

Figure 4.7: Toro di raggi $R = 5$ e $r = 2$.

Esercizio 4.10. *Calcolare il volume del toro di raggi $R > r > 0$.*

Soluzione: Supponiamo che il toro Ω sia centrato nell'origine e che sia perpendicolare all'asse z. L'area di una sezione verticale del toro vale πr^2, e la lunghezza di una porzione infinitesimale della circonferenza di raggio R vale $Rd\theta$ se θ varia tra 0 e 2π. Allora si deve avere

$$\text{Volume}(\Omega) = \int_\Omega dxdydz = \int_0^{2\pi} \pi r^2 R \, d\theta = 2\pi^2 r^2 R.$$

Si poteva ragionare anche usando le coordinate toroidali:

$$(x, y, z) = \psi(\varrho, \theta, \varphi) = ((R + \varrho\cos(\varphi))\cos(\theta), (R + \varrho\cos(\varphi))\sin(\theta), \varrho\sin\varphi), \qquad |\det J_\psi| = \varrho\,(R + \varrho\cos(\varphi)).$$

Si ha $\Omega = \psi(S)$ dove $S = \{(\varrho, \theta, z) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \varrho \le r\}$. Dunque

$$\text{Volume}(\Omega) = \int\int\int_S |\det J_\psi| \, d\varrho d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \varrho\,(R + \varrho\cos(\varphi))\, d\varphi \right) d\varrho = 2\pi^2 R r^2.$$

5 Integrali curvilinei

Esercizio 5.1. *Sia γ il grafico in $\mathbb{R}^2$ della funzione $y = |x|^{3/2}$ per $x \in [-4/3, 4/3]$. Calcolare la lunghezza di γ.*

Soluzione: Per simmetria la lunghezza di γ è due volte la lunghezza della curva parametrizzata $\gamma_+(t) = (t, t^{3/2})$, $t \in [0, 4/3]$. Si ha

$$\gamma_+'(t) = (1, \tfrac{3}{2}\sqrt{t}).$$

Allora

$$\ell(\gamma) = 2\int_0^{4/3} \|\gamma_+'(t)\| dt = 2\int_0^{4/3} \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}t}\, dt = \frac{16}{27}(4^{3/2} - 1) = \frac{112}{27}.$$

Esercizio 5.2. *Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ di equazioni parametriche*

$$\gamma(t) = (e^t \cos(t) + 1, e^t \sin(t) - 1)\,, \quad t \in [0, \pi].$$

Determinare la lunghezza di γ.

Soluzione: Si ha

$$\gamma'(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t))), \quad t \in [0, \pi].$$

Ne segue che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} = \sqrt{2}e^t$. Allora

$$\ell(\gamma) = \int_0^{\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi} e^t dt = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1).$$

Esercizio 5.3. *Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie*

$$\int_\gamma (xy + y\cos(z))\, ds$$

dove γ è la curva in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = (\cos(t), 2\sin(t), t)\,, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Soluzione: Si ha

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), 2\cos(t), 1)\,, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Ne segue che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2} = \sqrt{2 + 3\cos^2(t)}$. Allora, con $f(x, y, z) = xy + y\cos(z)$ si ha $f(\gamma(t)) = 4\cos(t)\sin(t)$, e dunque

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x, y, z)\, ds &= \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} 4\cos(t)\sin(t)\sqrt{2 + 3\cos^2(t)} \\ &= \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{d}{ds}(2 + 3s^2)^{3/2}\, ds = \frac{4}{9}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Esercizio 5.4. *Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie*

$$\int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

dove γ è la curva in $\mathbb{R}^3$ definita dalla diagonale del cubo di lato 2 *centrato nell'origine.*

Soluzione: Possiamo parametrizzare γ tramite:

$$\gamma(t) = (-1 + t, -1 + t, -1 + t)\,, \quad t \in [0, 2].$$

Ne segue che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2} = \sqrt{3}$. Allora, con $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ si ha $f(\gamma(t)) = 3(t-1)^2$, e dunque

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x, y, z)\, ds &= \int_0^2 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt \\ &= 3\sqrt{3} \int_0^2 (t-1)^2\, dt = 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 5.5. *Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie*

$$\int_\gamma |x|(y^2 + z^2) ds$$

dove γ e' il segmento in $\mathbb{R}^3$ che congiunge i punti $(-1, 1, 0)$, $(1, 1, -1)$.

Soluzione: Possiamo parametrizzare γ tramite:

$$\gamma(t) = (-1 + 2t, 1, -t)\,, \quad t \in [0, 1].$$

Ne segue che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2} = \sqrt{5}$. Allora, con $f(x, y, z) = |x|(y^2 + z^2)$ si ha $f(\gamma(t)) = |2t - 1|(1 + t^2)$, e dunque

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x, y, z)\, ds &= \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{5} \int_0^1 |2t - 1|(1 + t^2)\, dt \\ &= \sqrt{5} \int_0^{1/2} (1 - 2t)(1 + t^2)\, dt + \sqrt{5} \int_{1/2}^1 (2t - 1)(1 + t^2)\, d = \frac{11\sqrt{5}}{16}.\end{aligned}$$

Esercizio 5.6. *Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie*

$$\int_\gamma \cos^2(x) \sin(y) \cos(z)\, ds$$

dove γ è la curva in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica:

$$\gamma(t) = (\pi t, \pi t, 0)\,, \quad t \in [0, 1].$$

Soluzione: Si ha

$$\gamma'(t) = \pi(1, 1, 0), \quad t \in [0, 1].$$

Ne segue che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2} = \pi\sqrt{2}$. Allora, con $f(x, y, z) = \cos^2(x)\sin(y)\cos(z)$ si ha $f(\gamma(t)) = \cos^2(\pi t)\sin(\pi t)$, e dunque

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x, y, z)\, ds &= \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt = \pi\sqrt{2}\int_0^1 \cos^2(\pi t)\sin(\pi t)\, dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^\pi \cos^2(s)\sin(s)\, ds = \frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 5.7. *Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie*

$$\int_\gamma \cos^2(x)\sin(2y)\cos^2(z)\, ds$$

dove γ è la curva in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica:

$$\gamma(t) = (t, \tfrac{t}{2}, t), \quad t \in [0, \pi].$$

Soluzione: Si ha

$$\gamma'(t) = (1, 1/2, 1), \quad t \in [0, \pi].$$

Ne segue che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2} = \frac{3}{2}$. Allora, con $f(x, y, z) = \cos^2(x)\sin(2y)\cos^2(z)$ si ha $f(\gamma(t)) = \cos^4(t)\sin(t)$, e dunque

$$\int_\gamma f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt = \frac{3}{2}\int_0^\pi \cos^4(t)\sin(t)\, dt = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 5.8. *Calcolare l'integrale curvilineo di seconda specie*

$$\int_\gamma y\, dx + x^2\, dy$$

dove γ è la curva in $\mathbb{R}^2$ di equazione parametrica:

$$\gamma(t) = (\sqrt{t}, t^2), \quad t \in [0, 1].$$

Soluzione: Il vettore veolcità vale $\gamma'(t) = (\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t)$. Sia $F(x, y) = (y, x^2)$. Allora

$$\begin{aligned}\int_\gamma y\, dx + x^2\, dy &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \\ &= \int_0^1 (\tfrac{1}{2}\, t^{3/2} + 2t^2)\, dt = \frac{13}{15}.\end{aligned}$$

Esercizio 5.9. *Calcolare l'integrale curvilineo di seconda specie*

$$\int_\gamma \cos(2\pi x)\, dx + \sqrt{y^2 - x^2}\, dy$$

dove γ *è la curva in* $\mathbb{R}^2$ *rappresentata dal segmento che va dal punto* $(-1, 1)$ *al punto* $(1, 3)$.

Soluzione: Possiamo usare la parametrizzazione:

$$\gamma(t) = (t, t+2)\,, \quad t \in [-1, 1].$$

Il vettore veolcità vale $\gamma'(t) = (1, 1)$. Sia $F(x, y) = (\cos(x), \sqrt{y^2 - x^2})$. Allora

$$\begin{aligned}\int_\gamma \cos(x)\, dx + \sqrt{y^2 - x^2}\, dy &= \int_{-1}^{1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} (\cos(2\pi t) + \sqrt{(t+2)^2 - t^2})\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{t+1}\, dt = \frac{8\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

6 Integrali di superficie

Esercizio 6.1. *Sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche*

$$\sigma(u, v) = \{(u, v, 2u + v + 1),\ u \in [0, 1],\ v \in [0, 1]\}.$$

Calcolare l'area di Σ.

Soluzione: Notiamo che il gradiente di σ soddisfa

$$\sigma_u = \partial_u \sigma = (1, 0, 2), \quad \sigma_v = \partial_v \sigma = (0, 1, 1).$$

Dunque il prodotto vettoriale vale

$$\sigma_u \times \sigma_v = (-2, -1, 1), \quad \|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{6}$$

L'area di Σ allora è data da

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_\Sigma dS = \int_0^1 \int_0^1 \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv = \sqrt{6}.$$

Esercizio 6.2. *Sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche*

$$\sigma(u, v) = \{(u, u - 3v, v),\ u \in [-1, 1],\ v \in [-1, 1]\}.$$

Calcolare l'area di Σ.

Soluzione: Notiamo che il gradiente di σ soddisfa

$$\sigma_u = \partial_u \sigma = (1, 1, 0), \quad \sigma_v = \partial_v \sigma = (0, -3, 1).$$

Dunque il prodotto vettoriale vale

$$\sigma_u \times \sigma_v = (1, -1, -3), \quad \|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{11}$$

L'area di Σ allora è data da

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_\Sigma dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv = 4\sqrt{11}.$$

Esercizio 6.3. *Sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche*

$$\sigma(u, v) = \{(u, v, \cos v),\ u \in [-2\pi, 2\pi],\ v \in [-2\pi, 2\pi]\}.$$

Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma \sin(2y) dS.$$

Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto di coordinate $(0, \pi/4, \sqrt{2}/2)$.

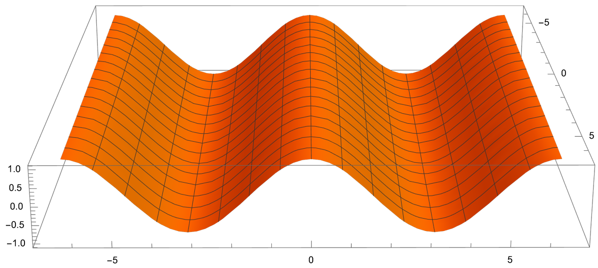

Figure 6.1: La superficie Σ dell'esercizio 6.3.

Soluzione: Calcoliamo

$$\sigma_u = (1,0,0)\,, \quad \sigma_v = (0,1,-\sin v), \qquad \sigma_u \times \sigma_v = (0, \sin v, 1), \quad \|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{1+\sin^2 v}$$

Allora

$$\int_\Sigma \sin(2y)dS = \int_{-2\pi}^{2\pi} du \int_{-2\pi}^{2\pi} dv \sin(2v)\sqrt{1+\sin^2 v} = 0\,,$$

dove usiamo il fatto che $v \mapsto \sin(2v)\sqrt{1+\sin^2 v}$ è una funzione dispari e dunque per simmetria $\int_{-2\pi}^{2\pi} dv \sin(2v)\sqrt{1+\sin^2 v} = 0$.

Il piano tangente nel punto di coordinate $(x,y,z) = (0,\pi/4,\sqrt{2}/2)$ deve essere ortogonale al vettore $\sigma_u \times \sigma_v$ quando $(u,v) = (0,\pi/4)$, dunque deve soddisfare $y\sin(\pi/4) + z = c$, ossia $y\frac{\sqrt{2}}{2} + z = c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Poiché sappiamo che il piano passa per il punto $(0,\pi/4,\sqrt{2}/2)$, si ottiene $c = (\pi+4)\sqrt{2}/8$. In conclusione, l'equazione parametrica per il piano tangente a Σ in $(0,\pi/4,\sqrt{2}/2)$ è

$$z(x,y) = \frac{(\pi+4)\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}y\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 6.4. *Sia Σ la superficie del toro in $\mathbb{R}^3$ centrato nell'origine e perpendicolare all'asse z, di raggi $R > r > 0$. Calcolare l'integrale di superficie*

$$\int_\Sigma z^2 dS.$$

Soluzione: Parametrizziamo la superficie del toro nelle coordinate naturali:

$$(x,y,z) = \sigma(\theta,\varphi) = ((R + r\cos(\varphi))\cos(\theta), (R + r\cos(\varphi))\sin(\theta), r\sin(\varphi)),$$

per $\varphi \in [0,2\pi]$, $\theta \in [0,2\pi]$. Si calcola

$$\|\sigma_\varphi \times \sigma_\theta\| = r\,(R + r\cos(\varphi)).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_\Sigma z^2 dS &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin^2(\varphi)\,r\,(R + r\cos(\varphi))d\varphi\right)d\theta \\ &= 2\pi r^3 R\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)d\varphi \\ &= 2\pi^2 r^3 R.\end{aligned}$$

Esercizio 6.5. *Sia Σ la superficie laterale del cilindro definito da*

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 \le 1, \ x \in [-2, 2]\}$$

Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma (x^2 - z^2) dS.$$

Soluzione: Parametrizziamo la superficie laterale del cilindro nelle coordinate cilindriche:

$$(x, y, z) = \sigma(x, \varphi) = (x, \cos(\varphi), \sin(\varphi)),$$

per $\varphi \in [0, 2\pi]$, $x \in [-2, 2]$. Notiamo che

$$\sigma_x = (1, 0, 0)\,, \quad \sigma_\varphi = (0, -\sin(\varphi), \cos(\varphi))\,, \quad \sigma_x \times \sigma_\varphi = (0, -\cos(\varphi), -\sin(\varphi))\,.$$

Allora $\|\sigma_x \times \sigma_\varphi\| = 1$ e possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (x^2 - z^2) dS &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-2}^{2} (x^2 - \sin^2(\varphi))\, dx \right) d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-2}^{2} x^2\, dx - 4 \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{20\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 6.6. *Sia Σ la superficie laterale del cilindro definito da*

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + (z-1)^2 \le 1, \ y \in [-1, 1]\}$$

Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma (x^2 + y^2) dS.$$

Soluzione: Parametrizziamo la superficie laterale del cilindro nelle coordinate cilindriche:

$$(x, y, z) = \sigma(y, \varphi) = (\cos(\varphi), y, 1 + \sin(\varphi)),$$

per $\varphi \in [0, 2\pi]$, $y \in [-1, 1]$. Notiamo che

$$\sigma_y = (0, 1, 0)\,, \quad \sigma_\varphi = (-\sin(\varphi), 0, \cos(\varphi))\,, \quad \sigma_y \times \sigma_\varphi = (\cos(\varphi), 0, \sin(\varphi))\,.$$

Allora $\|\sigma_y \times \sigma_\varphi\| = 1$ e possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (x^2 + y^2) dS &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{1} (\cos^2(\varphi) + y^2)\, dy \right) d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} y^2\, dy + 2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{10\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 6.7. *Sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche*

$$\sigma(u, v) = \{(\cos u \sin v, \sin u + \sin v, -\cos u - \cos v), \ u \in [-\pi/4, \pi/4], \ v \in [-\pi/2, \pi/2]\}\,.$$

Scrivere l'equazione del piano tangente a Σ nel punto di coordinate $(0, 0, -2)$.

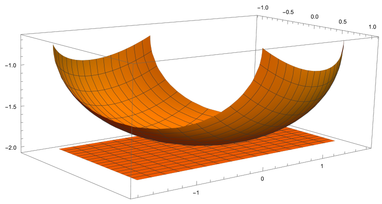

Figure 6.2: La superficie Σ dell'esercizio 6.7 e piano tangente nel punto $(0, 0, -2)$.

Soluzione: Le derivate parziali di $\sigma(u, v)$ sono

$$\sigma_u = (-\sin u \sin v, \cos u, \sin u), \quad \sigma_v = (\cos u \cos v, \cos v, \sin v).$$

Dunque

$$\sigma_u \times \sigma_v = (\cos u \sin v - \sin u \cos v, \sin u \sin^2 v + \sin u \cos u \cos v, -\sin u \sin v \cos v - \cos^2 u \cos v).$$

Il punto $(0, 0, -2)$ corrisponde alla superficie $\sigma(u, v)$ per $(u, v) = (0, 0)$. Allora nel punto $(0, 0, -2)$ la normale alla superficie è il vettore $[\sigma_u \times \sigma_v](0, 0) = (0, 0, -1)$. Il piano perpendicolare al vettore $(0, 0, -1)$ e passante per $(0, 0, -2)$ è il piano di equazione $z = -2$, oppure in termini parametrici:

$$\Pi = \{(x, y, -2), \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 6.8. *Sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche*

$$\sigma(u, v) = \{(v \cos u, v \sin u, u), \ u \in [0, 6\pi], \ v \in [0, 4]\}.$$

Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma \sqrt{x^2 + y^2} dS.$$

Soluzione: Le derivate parziali di $\sigma(u, v)$ sono $\sigma_u = (-v \sin u, v \cos u, 1)$ e $\sigma_v = (\cos u, \sin u, 0)$. Dunque

$$\sigma_u \times \sigma_v = (-\sin u, \cos u, -v) \qquad \|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{1 + v^2}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \int_0^{6\pi} \int_0^4 \sqrt{v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u} \ \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv \\ &= \int_0^{6\pi} \int_0^4 v \sqrt{1 + v^2} \, du dv = 6\pi \int_0^4 v \sqrt{1 + v^2} \, dv = 2\pi \left(17\sqrt{17} - 1\right). \end{aligned}$$

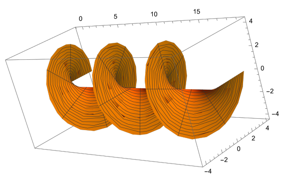

Figure 6.3: La superficie Σ dell'esercizio 6.8 è un elicoide.