FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2023/2024

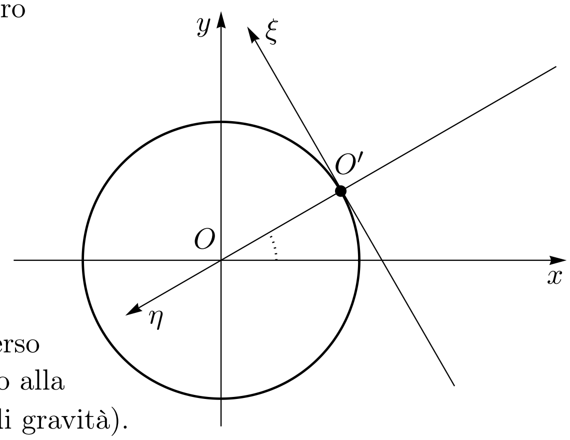
Primo appello (18-06-2024)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{5}{x} - \log|x| - \frac{2}{x^2}.$$

1. Si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si studino le curve dei livello dell'energia totale del sistema.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
5. Si dimostri che esistono traiettorie illimitate.
6. [Si discuta se le traiettorie illimitate divergono in un tempo finito o infinito.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un carrello si muove in un piano orizzontale lungo una guida circolare di raggio R con velocità angolare costante ω. Si scelga un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ tale che la guida giaccia nel piano xy, il suo centro coincida con O e, all'istante $t = 0$, il carrello si trovi in corrispondenza del punto $(R, 0, 0)$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile tale che O' coincida con il carrello e l'asse ξ sia tangente alla guida e sia diretto nel verso di avanzamento del carrello (quindi, a $t = 0$, l'asse ξ è parallelo all'asse y). Un omino che si trova sul carrello, subito prima che il carrello inizi a muoversi, lancia un sasso verso l'alto con velocità v_0; il sasso si muove sottoposto alla forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

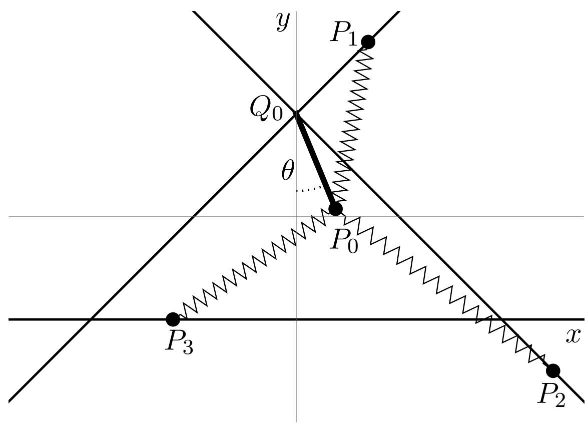


1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ che fa passare dal sistema K al sistema κ. come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del sasso nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ del sasso nel sistema di riferimento mobile.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del sasso.
5. [Si determini il valore che deve avere v_0, un volta fissato ω, perché l'omino riprenda il sasso quando il carrello riattraversa la prima volta la posizione iniziale.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico costituito da tre punti materiali P_0, P_1 e P_2, tutti di massa m, che si muovono in un piano orizzontale nel modo seguente: P_0 scorre lungo una circonferenza di raggio $R = 1$, mentre P_1 e P_2 scorrono lungo due rette tra loro ortogonali, passanti per il centro della circonferenza. Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano il punto P_2 ai punti P_0 e P_1, mentre una terza molla, sempre di lunghezza a riposo nulla ma di costante elastica $2k$, collega tra loro i punti P_0 e P_1.

1. Si scrivano la lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso in cui le molle abbiano tutti la stessa costante elastica k.]

Esercizio 4. [6+2] Tre punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa m, sono vincolati a muoversi nel piano xy, sulle rette $y = 1 + x$, $y = 1 - x$ e $y = -1$, rispettivamente, e sono collegati, ciascuno tramite una molla di lunghezza tascurabile e costante elastica k, a un quarto punto materiale P_0, che ha sempre massa m ed è a sua volta collegato al punto $Q_0 = (0, 1)$ tramite un'asta di lunghezza $\ell = 1$ e massa trascurabile. Tutti e quattro i punti sono inoltre soggetti alla forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).



1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità nel caso in cui la massa M dell'asta non sia trascurabile, ovvero si abbia $M > 0$.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = q_1\sqrt{p_1 q_1 - p_2 q_2}, \qquad Q_2 = q_1 q_2 \sqrt{p_2 q_2}, \qquad P_1 = \frac{\sqrt{p_1 q_1 - p_2 q_2}}{q_1}, \qquad P_2 = \frac{1}{q_1}\sqrt{\frac{p_2}{q_2}}.$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare in $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2q_1^4}\left((p_1 q_1 - p_2 q_2)^2 + \frac{p_2^2}{q_2^2}\right),$$

   si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nelle nuove variabili.
5. Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana data e si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle nuove variabili al variare dei dati iniziali.
6. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili originali in corrispondenza del dato iniziale $q_1(0) = q_2(0) = p_2(0) = 1$ e $p_1(0) = 2$].
7. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].