FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2023/2024

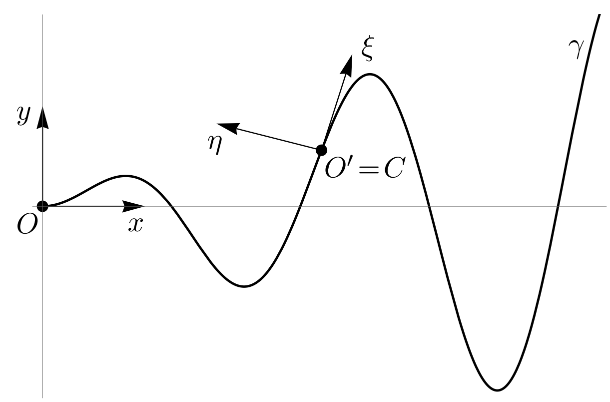
Secondo appello (02-07-2024)

<u>Esercizio 1.</u> [6] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^2\sqrt{x^2+3}}{|3x^2-1|}.$$

1. Si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si studino le curve dei livello dell'energia totale del sistema.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.

<u>Esercizio 2.</u> [6+1] Sia $\kappa = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso e sia γ una guida curvilinea descritta dall'equazione $y = x\sin x$, $x \geq 0$. Un carrello C si muove nel piano verticale xy lungo la guida γ. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento solidale con il carrello, tale che in ogni istante il punto O' coincide con la posizione di C, l'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z e, infine, l'asse ξ è tangente alla guida, diretto nel verso di avanzamento del carrello (cfr. la figura). Il carrello si trova in in corrispondenza dell'origine O del sistema di riferimento κ all'istante iniziale $t = 0$, e si muove con velocità costante $v_0 = 1$ nel verso dell'asse x. Un istante prima che il carrello parta, un omino, che si trova sul carrello, lancia un sasso P in alto, nella direzione dell'asse y, con velocità $v_1 > 0$ (sia g l'accelerazione di gravità).

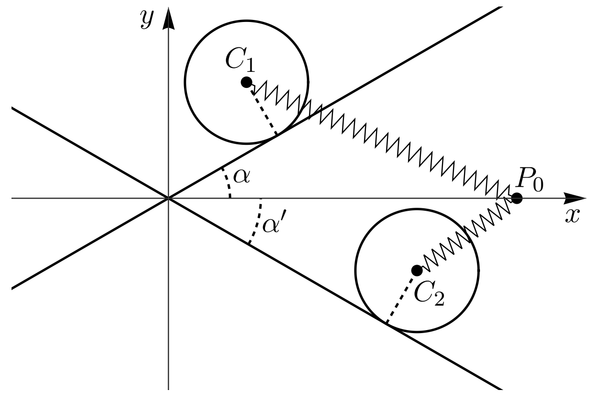


1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ che fa passare dal sistema K al sistema κ. come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del sasso P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ del sasso nel sistema di riferimento mobile K.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del sasso.
5. [Si determini per quali valori di v_1 il carrello C si trova alla stessa quota y del sasso P quando questo ricade nel punto O.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico costituito da tre punti materiali P_0, P_1 e P_2, tutti di massa m, che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: P_0 scorre lungo l'asse y, P_1 scorre lungo la parabola di equazione $x = 1 + y^2$ e P_2 scorre lungo la parabola di equazione $x = -1 - y^2$. Tre molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano i tre punti tra loro. I punti sono inoltre soggetti alla forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabiliià.
3. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_0.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+3] Due dischi omogenei, entrambi di raggio R e di massa M, si muovono in un piano verticale, che identifichiamo con il piano xy, nel modo seguente: il primo disco rotola senza strisciare lungo la retta che passa per l'origine e forma un angolo $\alpha = \pi/6$ con l'asse x, mentre il secondo disco rotola senza strisciare lungo la retta che passa per l'origine e forma un angolo $\alpha' = -\pi/6$ con. l'asse x. I due dischi sono soggetti alla forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità). Inoltre, due molle, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano i centri C_1 e C_2 dei due dischi a un punto materiale P_0, di massa m, libero di scorrere lungo l'asse x (cfr. la figura).



1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange. [Può essere utile ricordare che $\sin(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$].
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio.
3. Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate al punto precedente.
4. [Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso in cui il piano verticale ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+3] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = \log|1 + q_1 q_2|, \qquad Q_2 = q_1, \qquad P_1 = \frac{p_2 + q_1 q_2 p_2}{q_1}, \qquad P_2 = \frac{q_1 p_1 - q_2 p_2}{q_1}.$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare in $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\Big(p_1 q_1 - p_2 q_2\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_1} + q_2\right)^2 p_2^2,$$
si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nelle nuove variabili.
5. Si verifichi che la funzione
$$Q_2(t)P_2(t)$$
è una costante del moto per il sistema descritto dall'hamiltoniana $\mathcal{K}$ e si utilizzi il risultato per calcolare la soluzione delle equazioni del moto nelle nuove variabili al variare dei dati iniziali $(Q_1(0), Q_2(0), P_1(0), P_2(0)) = (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \overline{P}_1, \overline{P}_2)$.
6. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili originali in corrispondenza del dato iniziale $q_1(0) = p_1(0) = p_2(0) = 1$, $q_2(0) = 0$].
7. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].
8. [Se I indica la matrice jacobiana della trasformazione $\Phi\colon (q_1, q_2) \mapsto (Q_1, Q_2)$, si esprima la trasformazione $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ in termini di Φ e della matrice I.]