FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2023/2024

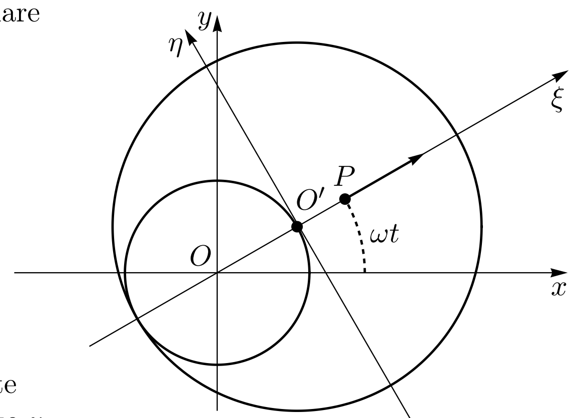
Terzo appello (06-09-2024)

<u>Esercizio 1</u> [6] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 2x^6 - 15x^4 + 24x^2.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si studino le curve dei livello dell'energia totale del sistema.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.

<u>Esercizio 2</u> [6+1] Sia $\kappa = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso, e sia γ una guida circolare di equazione $x^2 + y^2 = 1$ nel piano xy. Una piattaforma circolare di raggio $R = 2$ ruota nel piano xy con velocità angolare costante ω intorno al suo centro C, che a sua volta ruota, con la stessa velocità angolare ω, lungo la guida γ; all'istante $t = 0$, il centro C si trova in corrispondenza del punto $(1, 0, 0)$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile solidale con la piattaforma, tale che O' coincide con C, mentre gli assi ξ e ζ si mantengono il primo ortogonale alla guida γ, diretto verso l'esterno, il secondo parallelo all'asse z del sistema di riferimento κ (cfr. la figura). Un omino P, partendo dal centro C della piattaforma all'istante $t = 0$, si muove lungo l'asse ξ con velocità costante v_0.

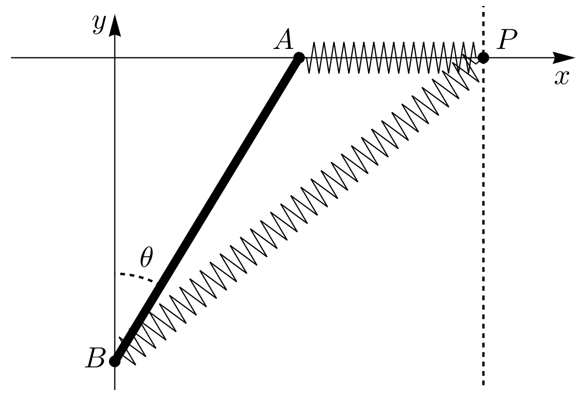


1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ che fa passare dal sistema K al sistema κ. come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ dell'omino P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ dell'omino P nel sistema di riferimento mobile K.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento dell'omino P.
5. Si trovi, in funzione dei valori di ω e v_0, in quale punto del sistema di riferimento fisso l'omino raggiunge il bordo della piattaforma, e si determini che valore deve assumere v_0 in funzione di ω, perché tale punto si trovi sull'asse x.
6. [Nel caso in cui l'omino P si muova sempre sulla piattaforma e sempre con velocità costante v_0, ma lungo l'asse x, si determini il valore che deve assumere v_0 in funzione di ω perché egli raggiunga il bordo della piattaforma quando questa ha compiuto una rotazione $\theta = \pi/2$.]

<u>Esercizio 3</u> [6+2] Tre punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa m, si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: P_1 scorre lungo la circonferenza di raggio $r = 1$ centrata nell'origine, P_2 scorre lungo l'asse x e P_3 scorre lungo l'asse y. I tre punti sono soggetti alla forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità), e sono inoltre collegati tra loro a due a due da molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_2.]

Esercizio 4 [6+3] Si consideri il sistema meccanico costituito da un'asta di lunghezza ℓ e massa M, in cui estremi A e B sono vincolati a scorrere lungo due assi ortogonali, che si possono identificare con l'asse x e l'asse y. L'asta è soggetta alla forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità); inoltre i due estremi dell'asta sono collegati a un punto fisso P, posto lungo l'asse orizzontale a distanza ℓ dal punto di intersezione dei due assi, ciascuno tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla (cfr. la figura).



1. Si scriva la lagrangiana del sistema (può essere conveniente utilizzare come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l'asta forma con il verso positivo dell'asse y (cfr. la figura)).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.
4. Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
5. Si discuta come cambia lo scenario se, in corrispondenza degli estremi A e B dell'asta, sono collocati due punti materiali di massa m.
6. [Si discuta come cambia lo scenario se il punto P, di massa m_0, è libero di scorrere lungo l'asse orizzontale.]

Esercizio 5 [6+3] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = \log\left(\frac{p_1}{q_1}\right), \quad Q_2 = -\log\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right), \quad P_1 = \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2)\frac{p_1}{q_1}, \quad P_2 = \frac{1}{2}q_2^2\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right).$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di prima specie $F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$.
3. Si verifichi che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial Q_j$ è non singolare in $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{(p_1 q_2 + p_2 q_1)^2}{(q_1 q_2)^2}\right),$$
si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nelle nuove variabili.
5. Si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle nuove variabili in corrispondenza della condizione iniziale che, espressa nelle variabili originali, è data da
$$q_1(0) = q_2(0) = p_1(0) = 1, \qquad p_2(0) = 0.$$
6. [Si determini la trasformazione inversa della trasformazione data.]
7. [Si esprima la soluzione del punto 5 in termini delle variabili originali.]
8. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].