

FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2023/2024

Quarto appello (27-01-2025)

ESERCIZIO 1 [6] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \log \left(1 + (x-1)^2 (x^2 - 4)^2 \right).$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si studino le curve dei livello dell'energia totale del sistema.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.

ESERCIZIO 2 [6+2] Sia $\kappa = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso e sia γ una guida curvilinea che, in κ , giace nel piano xy ed è descritta dall'equazione $y = (x-1)^2$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile tale che

- l'origine O' scorre lungo la guida γ in modo tale che la sua coordinata x , in ogni istante t , assuma il valore $x_{O'}(t) = t$.
- l'asse ξ si mantiene tangente alla guida γ , mentre l'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z .

Nel sistema di riferimento K , un punto materiale P di massa m si muove lungo l'asse ξ secondo la legge oraria $\xi(t) = v_0 t$, con $v_0 > 0$.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$, che fa passare dal sistema K al sistema κ , come composizione di una traslazione C con una rotazione B .
2. Si determini il moto $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ di P nel sistema di riferimento fisso κ .
3. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P .
4. Si dimostri che all'istante $t = 1$ il punto P attraversa l'asse x e si determini il valore che assume $x(t)$ in tale istante.
5. [Dal punto 4 segue che, se n indica il numero di volte in cui punto P attraversa l'asse x , si deve avere $n \geq 1$. Si determini esattamente il valore di n . (*Può essere utile utilizzare l'identità trigonometrica*

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}},$$

valida per $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.)]

ESERCIZIO 3 [6+2] Due punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa m , si muovono in $\mathbb{R}^3$ lungo l'elica circolare di equazione

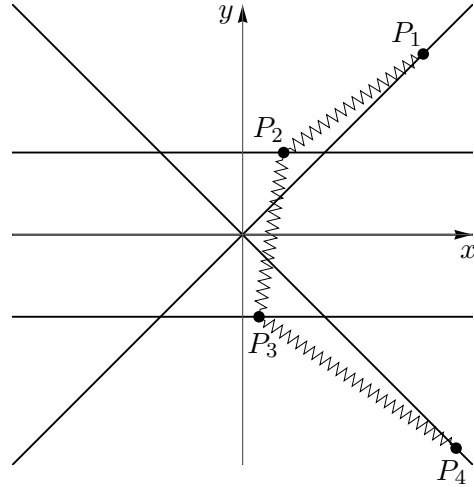
$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad z = \theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

sotto l'azione della forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse z (si indichi con g l'accelerazione di gravità), e di tre molle elastiche, tutte di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, di cui una collega i due punti tra loro, mentre le altre due collegano P_1 e P_2 all'origine.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. [Si consiglia di utilizzare come coordinate lagrangiane le variabili $\theta = \theta_1 + \theta_2$ e $\varphi = \theta_1 - \theta_2$, dove θ_1 e θ_2 sono le coordinate dei punti P_1 e P_2 , rispettivamente, lungo l'asse z .]
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si mostri che, se si eliminano le tre molle, il sistema ammette una variabile ciclica e si calcoli il corrispondente momento conservato.]

ESERCIZIO 4 [6+2] Si consideri il sistema meccanico costituito da quattro punti materiali P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , tutti di massa m , vincolati a scorrere nel piano verticale xy lungo le guide di equazione $y = x$, $y = 1$, $y = -1$ e $y = -x$, rispettivamente.

I quattro punti sono sottoposti all'azione della forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità); inoltre tre molle, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collegano tra loro P_1 a P_2 , P_2 a P_3 e P_3 a P_4 (cfr. la figura).



1. Si determini un sistema di coordinate lagrangiane e si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.
4. Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
5. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_2 in corrispondenza di una configurazione qualsiasi del sistema.]

ESERCIZIO 5 [6+3] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{p} \sqrt{q^2 + p^2 + q^2 p^2}, \\ P = -1 + \frac{1}{q} \sqrt{q^2 + p^2 + q^2 p^2}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$, e si verifichi che la derivata seconda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial P}$$

non si annulla in $\mathcal{D}$.

3. Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{q^2 \dot{q}^2}{1 + q^2},$$

e si determini la corrispondente hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$.

4. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q, P)$ nelle nuove variabili.
5. Si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle nuove variabili in corrispondenza della condizione iniziale che, espressa nelle coordinate lagrangiane, è data da $(q(0), \dot{q}(0)) = (1, 2)$.
6. [Si determini la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange in corrispondenza della condizione iniziale del punto 5.]
7. [Si determini la trasformazione inversa della trasformazione data.]
8. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].