FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2023/2024

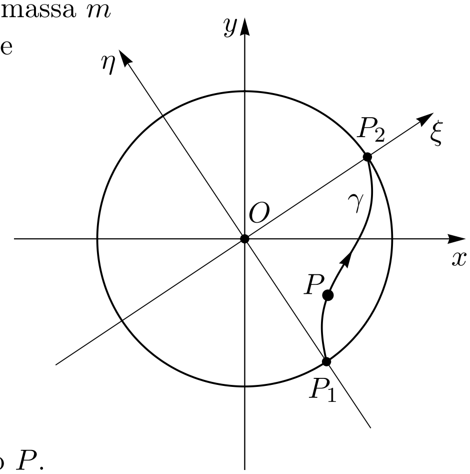
Quinto appello (12-02-2025)

<u>Esercizio 1</u> [6] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{1+(x+5)^2(x-1)^2}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si studino le curve dei livello dell'energia totale del sistema.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.

<u>Esercizio 2</u> [6+3] In un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, una piattaforma circolare di raggio $R = 1$ ruota nel piano xy intorno all'origine O con velocità angolare costante ω. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile solidale con la piattaforma, che coincide con κ all'istante $t = 0$. Siano P_1 e P_2 due punti del bordo della piattaforma che, nel sistema K, hanno, rispettivamente, coordinate $(0, -1)$ e $(1, 0)$. Un punto materiale P di massa m m si muove sulla piattaforma (cfr. la figura) con legge oraria $(\xi(t), \eta(t)) = (a(t), b(t))$, dove $a, b\colon [0, T] \to \mathbb{R}$, con $T > 0$, sono funzioni positive di classe C^1 tali che $a^2(t) + b^2(t) < 1$ $\forall t \in (0, T)$ e, al variare di t in $[0, T]$, la curva $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ connette P_1 a P_2.

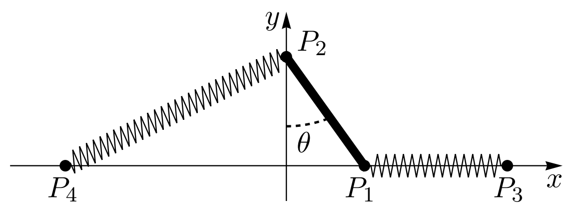


1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ che fa passare da K a κ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e la velocità di trascinamento del punto P.
4. Si trovi, in funzione di T, il valore che deve assumere ω perché il punto P raggiunga il bordo della piattaforma nel punto di coordinate $(0, 1)$ nel sistema κ.
5. [Fissato ω come al punto 4, si determinino due funzioni $a(t)$ e $b(t)$ in modo tale che il punto P, mentre si muove lungo γ nel sistema K, descriva nel sistema κ un arco di circonferenza che connette i punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$. (*Suggerimento: Si cerchi la traiettoria nella forma* $(x(t), y(t)) = (-x_0 + R\cos(\varphi(t)), R\sin(\varphi(t)))$, *con* $\varphi(t) = A + Bt$, *e si fissino* x_0, *R*, *A e B*.)]

<u>Esercizio 3</u> [6+3] Un punto materiale P di massa m si muove in un piano orizzontale all'interno di una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio 1, sotto l'azione di una forza repulsiva F che gli impedisce di raggiungere la circonferenza e di una molla che lo connette con un punto Q di $\mathcal{C}$. La forza F è diretta verso il centro O di $\mathcal{C}$ e ha intensità $\alpha d/(1 - d^2)$, dove $\alpha > 0$ è una costante e d è la distanza di P da O, mentre la molla ha costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Si determini la lagrangiana del sistema. [*Può essere utile scegliere un sistema di riferimento nel piano in cui O coincide con l'origine e Q ha coordinate* $(1, 0)$.]
2. Si scrivano le le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si dimostri che esiste un'unica configurazione di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si dimostri che, se si elimina la molla, il punto P o si muove lungo una retta oscillando intorno all'origine o si muove all'interno di una corona circolare.]

Esercizio 4 [6+2] Si consideri il sistema meccanico costituito da un'asta rigida omogenea di massa M e lunghezza $\ell = 1$, i cui estremi P_1 e P_2 scorrono lungo due rette ortogonali che identifichiamo con l'asse x e l'asse y, rispettivamente. Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano i due estremi P_1 e P_2 dell'asta ai punti $P_3 = (2, 0)$ e $P_4 = (-2, 0)$, rispettivamente. L'asta è inoltre soggetta all'azione della forza di gravità, che è diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).



1. Si scriva la lagrangiana del sistema. [Può essere conveniente utilizzare come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l'asta forma con l'asse y discendente (cfr. la figura) o, alternativamente, la coordinata del punto P_1 lungo l'asse x.]
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.
4. Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
5. [Si discuta come cambia lo scenario se si rimuove la molla che collega il punto P_1 al punto P_3; in particolare si determinino le nuove configurazioni di equilibrio.]

Esercizio 5 [6+3] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = q_1^2 \sqrt{\dfrac{p_1 p_2}{q_1 q_2}}, \\ Q_2 = -(q_1 p_1 + q_2 p_2)\, \dfrac{p_2}{2q_2} \sqrt{\dfrac{2q_2}{p_2} - 1}, \\ P_1 = \sqrt{\dfrac{p_1 q_2}{q_1 p_2}}, \\ P_2 = \sqrt{\dfrac{2q_2}{p_2} - 1}, \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si consideri l'hamiltoniana
$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2}\right)$$
e si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nelle nuove variabili.
4. Si risolvano le equazioni del moto nelle nuove variabili in corrispondenza della condizione iniziale che, espressa nelle coordinate originali, è data da $q_1(0) = q_2(0) = p_1(0) = p_2(0) = 1$.
5. [Si determini la trasformazione inversa della trasformazione data. (*Suggerimento: Può essere utile verificare preliminarmente le identità*
$$q_1 p_1 = Q_1 P_1, \qquad p_2 = \frac{2q_2}{1 + P_2^2}, \qquad q_1^2 = \frac{Q_1(1 + P_2^2)}{2P_1},$$
e utilizzare le prime due insieme alla definizione di Q_2 per ricavare q_2.)]
6. [Si usi la trasformazione inversa del punto 5 per determinare la soluzione del punto 4 nelle variabili originali.]